Meetkundeopgaven voor wiskunde B

Serie 2

Opgave 1

Door het punt P(1,1) lopen twee lijnen $l:\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)+t\_{1}·\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)$ en $m:\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)+t\_{2}·\left(\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right).$

Twee punten T op l en U op m wandelen met gelijke snelheid over deze twee lijnen vanuit P. Op tijdstip t=0 zijn ze in P.

a. Leg uit dat dit betekent dat in de vectorvoorstellingen van l en m met dezelfde t1 = t2 = t als parameter kan worden gerekend. Met welke snelheid lopen de punten dan over l en m?

Het punt Q heeft coördinaten (4,0).

b. Natuurlijk is hoek TPU recht. Onderzoek of er een tijdstip t is waarop ook hoek TQU recht is.

Uitwerkingen

a. De richtingsvectoren hebben gelijke lengte, namelijk $\sqrt{5}$. Dit is ook de snelheid die je krijgt.

b. T kun je schrijven als (1 + 2t, 1 + t) en U als (1 + t, 1 ­– 2t). Dan

$$\vec{QT}=\left(\begin{matrix}1+2t-4\\1+t\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-3+2t\\1+t\end{matrix}\right)$$

$$\vec{QU}=\left(\begin{matrix}1+t-4\\1-2t\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-3+t\\1-2t\end{matrix}\right)$$

Het inproduct is

(-3+2t)(-3+t)+(1+t)(1-2t)=

9-3t-6t+2t2 +1 -2t +t -2t2 =

-10t+10

Dit inproduct is dus gelijk aan 0 als -10t+10=0 dus t=1. Dat tijdstip is er kortom.

Opgave 2



Bereken de oppervlakte van de driehoek.

Uitwerking:

Dit kan op heel veel manieren!

Een "rekenmanier" is:

$\vec{AC}=\left(\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right)$ heeft lengte 5. Daarnaast is dus $\left(\begin{matrix}-4\\3\end{matrix}\right)$ is een normaalvector van AC en heeft ook lengte 5. Dit geeft –4x+3y=c als vergelijking voor AC, en omdat de lijn door A gaat zien we dat het wordt –4x+3y=2 ofwel –4x+3y–2=0.

De afstand van B(5,-1) tot deze lijn is:

$$\frac{|-4·5+3·-1-2|}{5}=\frac{25}{5}=5$$

De oppervlakte van de driehoek is dus 0,6·5·5=12,5.

Opgave 3

Gegeven is de lijn k: –x+5y=0. Bepaal richtingsvectoren voor de lijnen die met k een hoek maken van 60o.

(Tip: je mag in de richtingsvector die je zoekt één kental vast nemen, dus je neemt bijvoorbeeld $\left(\begin{matrix}1\\a\end{matrix}\right)$.)

Uitwerking:

Een normaalvector van k is $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$ dus een richtingsvector is $\left(\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right).$

Laten we voor de gevraagde richtingsvectoren $\left(\begin{matrix}1\\a\end{matrix}\right)$ nemen.

Dan moet gelden: $\left(\begin{matrix}1\\a\end{matrix}\right)·\left(\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right)=5+a=\sqrt{1+a^{2}}·\sqrt{26}·\cos(\left(60°\right))=\sqrt{1+a^{2}}·\sqrt{26}·\frac{1}{2}$ .

We kunnen a nu vinden door de vergelijking $5+a=\sqrt{1+a^{2}}·\sqrt{26}·\frac{1}{2}$ op te lossen.

$$a^{2}+10a+25=\left(1+a^{2}\right)·6\frac{1}{2}$$

$$a^{2}+10a+25=6\frac{1}{2}a^{2}+ 6\frac{1}{2}$$

$$-5\frac{1}{2}a^{2}+10a+18\frac{1}{2}=0$$

$$a=\frac{-10\pm \sqrt{507}}{-11}=\frac{-10\pm 13\sqrt{3}}{-11}$$

We verwachten twee antwoorden en die zijn er. De richtingsvectoren zijn dus

$$\left(\begin{matrix}1\\\frac{-10\pm 13\sqrt{3}}{-11}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}11\\10\pm 13\sqrt{3}\end{matrix}\right)$$

Opgave 4

Gegeven is de cirkel $\left(x+6\right)^{2}+\left(y+5\right)^{2}=9$ en het punt O(0,0).

Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen door O aan de cirkel. (N.B. Er komt een lelijk antwoord uit)

Uitwerking:

De raaklijnen kunnen we schrijven als $y=ax$ oftewel $-ax+y=0$.

De afstand van (-6,-5) tot $-ax+y=0$ moet gelijk zijn aan 3, dus

$$\frac{|6a-5|}{\sqrt{1+a^{2}}}=3$$

Kwadrateren geeft

$$\frac{36a^{2}-60a+25}{1+a^{2}}=9$$

$$36a^{2}-60a+25=9+9a^{2}$$

$$27a^{2}-60a+16=0$$

$$a=\frac{60\pm \sqrt{1872}}{54}=\frac{60\pm 12\sqrt{13}}{54}$$

Er moeten twee oplossingen zijn (punt buiten cirkel heeft altijd twee raaklijnen) dus de oplossingen moeten ook wel voldoen.

Dus de vergelijkingen zijn $-\frac{60\pm 12\sqrt{13}}{54}x+y=0$.

Opgave 5

Gegeven zijn de cirkels met middelpunt (1,0) en straal 1 en met (4,0) en straal 2. Deze cirkels raken elkaar en hebben daar een gemeenschappelijke raaklijn. Daarnaast zijn er nog twee gemeenschappelijke raaklijnen die beide door een gemeenschappelijk punt E op de x-as gaan.



a. Bepaal de coördinaten van E.

b. Bereken vergelijkingen van de raaklijnen.

Uitwerking:

a.



Noem de afstand AE=x, dan EC=x+3. Trek de twee stralen AF en CG die horen bij de bovenste raaklijn. Dan volgt uit gelijkvormigheid dat $\frac{x}{1}=\frac{x+3}{2}$. Hieruit volgt dat x=3 en dus dat E coördinaten (-2,0) heeft.

b. De bovenste raaklijn is y=ax+b voor bepaalde a en b, de onderste y=–ax–b. Merk op dat EF=$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Het getal a is de helling van de bovenste raaklijn, dus de tangens van de hellingshoek, en is gelijk aan $a=\frac{1}{2\sqrt{2} }=\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Dus de bovenste raaklijn is $y=\frac{1}{4}\sqrt{2}x+b$ en gaat door (-2,0). Dan is $b=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus de raaklijnen zijn$ y=\frac{1}{4}\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $y=-\frac{1}{4}\sqrt{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opgave 6

Twee cirkels, een met middelpunt A(0,0) en straal $\sqrt{5}$ en een met middelpunt C(3,0) en straal $\sqrt{2}$, snijden elkaar in de punten B en D.

De hoek waaronder twee cirkels elkaar snijden is gelijk aan de hoek die de raaklijnen in het snijpunt maken.

Bereken de hoek waaronder de cirkels elkaar snijden (het maakt niet uit of dat in B of D is) op twee decimalen nauwkeurig.

Uitwerking:

Het is duidelijk dat de snijpunten B(2,1) en D(2,–1).

We hebben $\vec{AB}=\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)$, dus een rv van de raaklijn aan de eerste cirkel is $\left(\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right)$.

Daarnaast $\vec{CB}=\left(\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right)$, dus een rv van de raaklijn aan de tweede cirkel is $\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right).$

Gebruikmakend van de twee formules voor het inproduct vinden we:

$$1·1-2·1=\sqrt{5}·\sqrt{2}·cos⁡(φ)$$

dus

$\cos(\left(φ\right))=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ en dat geeft een $φ≈108,43°$. Omdat een hoek tussen twee lijnen altijd scherp is, is de gevraagde hoek 180-108,43 = 71,57o (dit laatste kun je ook meteen vinden door voor de cosinus de absolute waarde te nemen - zoals in het boekje is gegeven).