**Examen VWO**

**2025**

tijdvak 2

donderdag 19 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Formules*** | |
|  |  |
|  | **Goniometrie** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Beweging over twee lijnen*** | |
|  |  | Voor beweegt het punt volgens de bewegingsvergelijkingen:  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingVoor beweegt tegelijkertijd het punt volgens de bewegingsvergelijkingen:  **figuur 1**  Hierbij is de tijd.  Zowel de baan van als de baan van  is een deel van een lijn. In figuur 1 zijn  deze banen weergegeven.  In figuur 1 is de positie van en van  voor een waarde van weergegeven.  Er geldt:   * ligt onder de -as en ligt boven de   -as én   * en hebben gelijke afstand tot de -as. |
| 3p | **1** | Bereken exact de -coördinaat van in dit geval. |
|  |  |  |
|  |  | Punt beweegt met constante snelheid over zijn baan. De snelheid waarmee over zijn baan beweegt, is niet constant. Er geldt: op is de snelheid van acht keer zo groot als de snelheid van . |
| 4p | **2** | Bewijs dat op de snelheid van inderdaad acht keer zo groot is als de snelheid van . |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 2 zijn opnieuw de banen van **figuur 2**  en weergegeven. Ook is voor  en voor het lijnstuk  weergegeven. De helling van lijnstuk  is afhankelijk van .  Op een tijdstip is de helling van lijnstuk  gelijk aan . |
| 4p | **3** | Bereken exact de coördinaten van in  dit geval. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Opbrengst van zonnepanelen*** | |
|  |  | Op het platte dak van de uitbouw van een huis **foto**  Afbeelding met Zonne-energie, zonne-energie, zonnepaneel, Zonneschijf  Automatisch gegenereerde beschrijvingaan de Parallelweg 10A worden tien even grote  zonnepanelen geïnstalleerd. De panelen worden  op een stalen frame gemonteerd dat gekanteld is  in de richting van het zuiden. Op het horizontale  platte dak worden ze in twee rijen achter elkaar  geplaatst. Zie de foto. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Voorafgaand aan de installatie heeft de leverancier een tekening gemaakt van een zijaanzicht van de opstelling van de panelen. Zie figuur 1, die ook vergroot op de uitwerkbijlage staat. In die situatie verwacht de leverancier maximale energieopbrengst.  Afbeelding met lijn, diagram, schets, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1**  Met behulp van deze tekening berekent de leverancier de lengte (in cm) van de te gebruiken panelen. In de tekening geldt:   * de punten , , en zijn de hoekpunten van twee panelen; * punt ligt recht boven de linker dakrand en punt recht boven de rechter dakrand; * de panelen maken een hoek van 30° met het dakoppervlak; * de lengte van de dakrand is 172 cm; * de lengte van en van is cm; * is zo gekozen dat een zonnestraal door , die een hoek van 28° met de dakrand maakt, in terecht komt; in dat geval ligt de achterste rij panelen niet in de schaduw van de voorste rij panelen.   De rand en de dikte van de zonnepanelen worden in deze opgave buiten beschouwing gelaten. |
| 5p | **4** | Bereken algebraïsch de waarde van die de leverancier heeft berekend. Geef je eindantwoord in gehele centimeters. Je mag hierbij gebruikmaken van de uitwerkbijlage. |
|  |  |  |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 2 is het door de **figuur 2**  zonnepanelen geleverde  vermogen in kW op een  zonnige 31 augustus uitgezet  tegen de tijd in uren.  Uitgaande van de meetwaarden  tussen zonsopkomst en  zonsondergang is de zwarte  vloeiende kromme getekend.  De formule bij deze kromme is van de vorm:  met  Hierbij is de tijd in uren met om 7.00 uur.  De kromme gaat onder andere door de punten en . |
| 4p | **5** | Bereken met behulp van deze punten de waarde van en van . Geef je eindantwoorden in drie decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De buren op huisnummer 10B hebben ook zonnepanelen. De energieopbrengst van deze panelen wordt direct gebruikt of direct teruggeleverd aan de energiemaatschappij. Eventueel energieverlies wordt in deze opgave buiten beschouwing gelaten. De energieopbrengst wordt onder andere gebruikt voor het opladen van een elektrische auto. Alle elektriciteit die tijdens het opladen wordt opgewekt, wordt direct in de accu van de auto opgeslagen. Zo wordt de accu met enkel zonne-energie opgeladen.  Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingOp 31 augustus wordt het geleverde vermogen in kW tussen zonsopkomst en zonsondergang van de zonnepanelen op dit adres in een model benaderd met de formule:  Hierbij is de tijd in uren met  om 7.00 uur. De grafiek  van is hiernaast weergegeven.  De energieopbrengst in kWh  tussen twee tijdstippen en  is te berekenen met de integraal:  met  Om 11.00 uur wordt de elektrische auto aan de laadpaal gekoppeld. De accu, met opslagcapaciteit 72 kWh, is op dat tijdstip voor de helft opgeladen.  Met behulp van de integraal kan worden berekend hoe lang het duurt tot de accu voor driekwart is opgeladen met de elektriciteit die door de panelen is opgewekt. |
| 5p | **6** | Bereken met behulp van primitiveren hoeveel minuten dat duurt. Geef je eindantwoord als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vierkant en driehoek*** | |
|  |  | De functie wordt gegeven door . **figuur 1**  Afbeelding met lijn, diagram, schets, ontwerp  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 1 zijn de grafiek van en het vierkant  weergegeven.  Voor vierkant geldt:   * elke zijde is evenwijdig met de -as of de -as; * de hoekpunten en liggen op de grafiek van ; * de -coördinaat van is drie keer zo groot als   de -coördinaat van . |
| 4p | **7** | Bereken algebraïsch de coördinaten van .  Geef je eindantwoorden in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De lijn met vergelijking snijdt de -as **figuur 2**  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, Parallel  Automatisch gegenereerde beschrijvingin punt en de grafiek van in punt .  De raaklijn in het punt aan de grafiek van  snijdt de -as in punt . Zie figuur 2.  Er geldt: voor elke waarde van heeft lijnstuk  lengte 1. |
| 4p | **8** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | De lijn door loodrecht op de raaklijn snijdt  deze raaklijn in punt . In figuur 3 is voor een  waarde van de rechthoekige driehoek **figuur 3**  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvinggrijs weergegeven.  Als varieert, varieert de lengte van zijde .  Als de lengte van zijde is, dan geldt voor  de oppervlakte van de driehoek: |
| 3p | **9** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
| 5p | **10** | Bereken exact de maximale oppervlakte van  driehoek . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee lijnstukken met eindpunt*** | |
|  |  | Gegeven zijn de punten en . Verder is een punt gegeven dat niet samenvalt met of . In figuur 1 en 2 zijn voor twee posities van de lijnstukken en getekend.  Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1 figuur 2**  Punt kan zo worden gekozen, dat op de -as ligt en en even lang zijn. |
| 3p | **11** | Bereken exact de -coördinaat van waarbij dit het geval is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Vector wordt tegen de klok in om gedraaid. Het resultaat is vector . Vector wordt met de klok mee om gedraaid. Het resultaat is vector .  Punt is het midden van lijnstuk .  In figuur 3 en 4 zijn voor twee posities van de vectoren , , en weergegeven. Ook zijn het lijnstuk en punt weergegeven.  Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving  **figuur 3 figuur 4**  De coördinaten van zijn onafhankelijk van de positie van punt . |
| 6p | **12** | Bewijs dit. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Wortel en sinus*** | |
|  |  | De functies en worden gegeven door en .  In figuur 1 zijn de grafieken  van en weergegeven. **figuur 1**  Afbeelding met schets, lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijving  De oorsprong is een  gemeenschappelijk punt van de  twee grafieken. Verder snijden de  grafieken elkaar achtereenvolgens  in de punten , , , … .  In figuur 2 is een deel van figuur 1  rondom snijpunt vergroot  weergegeven. In deze figuur zijn  de raaklijnen in aan de grafiek  van en de grafiek van gestippeld **figuur 2**  Afbeelding met schets, lijn  Automatisch gegenereerde beschrijvingweergegeven.  De helling van de grafiek van in is gelijk aan  . De helling van de grafiek van in is ,  dus twee keer zo groot.  Als een even getal is, geldt:  In de snijpunten is de helling van de grafiek van  twee keer zo groot als de helling van de grafiek van . |
| 7p | **13** | Bewijs deze eigenschap. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie keer over de lijn*** | |
|  |  | Voor en wordt de functie gegeven door:  De grafiek van heeft een knik met -coördinaat . Deze knik verdeelt de grafiek van in twee delen. Links van deze knik bevindt zich een top van de grafiek van . De -coördinaat van deze top is te schrijven als: |
| 5p | **14** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | In de figuur zijn de grafieken van , en en de lijn met vergelijking weergegeven.  Als toeneemt, neemt de -coördinaat van de top toe. Ook de  -coördinaat van de knik neemt dan toe.  Het aantal gemeenschappelijke punten van de grafiek van en lijn hangt af van deze -coördinaten. Zo snijden de grafiek van en lijn elkaar in één punt. De grafiek van snijdt lijn in drie punten en de grafiek van snijdt lijn in één punt. De waarden van waarvoor de grafiek van en lijn drie snijpunten hebben, vormen een interval. |
| 5p | **15** | Bereken exact dit interval. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vlakdeel en rakende cirkel*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie wordt gegeven door **figuur 1**  .  In figuur 1 is de grafiek van weergegeven.  De grafiek van snijdt de -as in het punt .  De lijn met vergelijking raakt  de grafiek van in . is het enige punt  van de grafiek van dat op ligt.  De grafiek van snijdt de -as in het punt .  is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de  grafiek van , lijn en de verticale lijn door .  wordt om de -as gewenteld. |
| 3p | **16** | Bereken de inhoud van het  omwentelingslichaam dat ontstaat als om de  -as wordt gewenteld. Geef je eindantwoord  als geheel getal. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De grafiek van heeft twee **figuur 2**  scheve Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingasymptoten met  richtingscoëfficiënt -1.  In figuur 2 is de grafiek van met  deze asymptoten weergegeven.  Vergelijkingen van de scheve  asymptoten zijn en  . |
| 3p | **17** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | **figuur 3**  Afbeelding met diagram, cirkel, lijn, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingIn figuur 3 zijn de twee scheve  asymptoten van de grafiek van  weergegeven. Ook is de cirkel  met middelpunt onder de -as  weergegeven. Deze cirkel raakt  aan beide scheve asymptoten en  aan de -as. |
| 4p | **18** | Bereken exact de coördinaten van . |

**Wiskunde B** **2025-II**

**Uitwerkingen. (N=2,1)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Beweging over twee lijnen*** |  |
| **1** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
| **2** | **maximumscore 5** |  |
|  | * voor alle waarden van | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * en inderdaad acht keer zo groot als | 1 |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Opbrengst van zonnepanelen*** |  |
| **4** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft cm | 1 |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  | * en | 1 |
|  | * en | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * en | 1 |
| **6** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * een primitieve is | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * en intersect: | 1 |
|  | * het opladen duurt minuten | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vierkant en driehoek*** |  |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 1 |
|  | * en | 1 |
| **8** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft en daarmee | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * gaat door geeft , dus | 1 |
| **9** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
| **10** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft of | 1 |
|  | * de maximale oppervlakte is | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee lijnstukken met eindpunt*** |  |
| **11** | **maximumscore 3** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
| **12** | **maximumscore 6** |  |
|  | * en | 2 |
|  | * en | 1 |
|  | * en | 2 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Wortel en sinus*** |  |
| **13** | **maximumscore 7** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en | 3 |
|  | * voor ( even) geldt: | 1 |
|  | * en , en dat is twee keer zo groot | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie keer over de lijn*** |  |
| **14** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | * geeft ofwel | 1 |
|  |  | 2 |
| **15** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * voor zijn er drie snijpunten | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vlakdeel en rakende cirkel*** |  |
| **16** | **maximumscore 3** |  |
|  | * invoer: zero: | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * antwoord: 3212 | 1 |
| **17** | **maximumscore 3** |  |
|  | * , dus S.A.: | 1 |
|  | dus S.A.: | 2 |
| **18** | **maximumscore 4** |  |
|  | * ligt op de middellijn van de asymptoten: | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |