**Examen VWO**

**2024**

tijdvak 2

maandag 24 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Formules*** | |
|  |  |
|  | **Goniometrie** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee functies*** | |
|  |  | De functies en worden gegeven door en .  Het snijpunt van de grafieken van en is het snijpunt . Zie figuur 1.  **figuur 1** **figuur 2** |
| 4p | **1** | Bereken exact de coördinaten van . |
|  |  |  |
|  |  | De lijn heeft vergelijking .  Lijn raakt aan de grafiek van in het punt rechts van de -as. Het vlakdeel wordt ingesloten door de grafiek van , lijn en de -as.  In figuur 2 is dit vlakdeel grijs weergegeven. |
| 5p | **2** | Bereken exact de oppervlakte van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Cobb-Douglass-productiefunctie*** | |
|  |  | De Cobb-Douglas-productiefunctie is een wiskundig model dat economen gebruiken om de productie te voorspellen. In dit model hangt de productie af van twee factoren: **arbeid** en **kapitaal**.  Met arbeid wordt het aantal voltijdbanen van werknemers bedoeld. Met kapitaal wordt in deze opgave het aantal machines bedoeld dat beschikbaar is voor de productie. De formule bij dit model luidt:  Hierbij zijn , en constanten die afhangen van het soort bedrijf.  Iemand wil € 1 000 000 per jaar investeren in een nieuw bedrijf. Voor een bedrijf in deze sector geldt , en . De kosten per voltijdbaan per jaar bedragen € 50 000 en de kosten per machine per jaar bedragen € 20 000.  Er geldt dus:  Uit deze gegevens is af te leiden dat |
| 2p | **3** | Toon aan dat . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De investeerder wil het volledige bedrag van € 1 000 000 investeren in arbeid en kapitaal, en wel in zo’n verhouding dat de productie maximaal is. |
| 5p | **4** | Bereken algebraïsch hoeveel voltijdbanen de investeerder moet inzetten om de productie maximaal te krijgen. |
|  |  |  |
|  |  | Als dan spreken economen van een constant schaalvoordeel. Dat wil zeggen dat de inzet van arbeid en kapitaal evenredig is met de productie. Ofwel: als zowel als met dezelfde factor groeit, dan groeit ook de productie met diezelfde factor . |
| 4p | **5** | Bewijs dat bij geldt: als zowel als met dezelfde factor groeit, dan groeit ook de productie met diezelfde factor . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Loodrecht op de snelheidsvector*** | |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, schets  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe beweging van een punt wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:  met **figuur 1**  In figuur 1 is de baan van weergegeven.  Punt is het snijpunt van de baan van met de  positieve -as. Er is een positie van punt waarvoor de  afstand tussen de punten en maximaal is. |
| 3p | **6** | Bereken deze maximale afstand. Geef je eindantwoord  in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | In figuur 2 is een situatie weergegeven waarbij de  vector loodrecht staat op de snelheidsvector  in punt .  Hieruit volgt: . **figuur 2** |
| 4p | **7** | Bewijs dat uit het feit dat de vector loodrecht staat  op de snelheidsvector in punt inderdaad volgt:  . |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, schets, cirkel  Automatisch gegenereerde beschrijving |
|  |  | Er zijn vier posities van waarbij een situatie zoals in  figuur 2 voorkomt. |
| 3p | **8** | Bereken exact de vier waarden van die horen bij  deze posities. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Passende parabool*** | |
|  |  | Afbeelding met diagram, lijn, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe kwadratische functie figuur wordt  gegeven door .  De grafiek van snijdt de -as in het punt  .  De raaklijn aan de grafiek van in punt  snijdt de -as in het punt . Verder  is gegeven dat de grafiek van een  dalparabool is die de positieve -as raakt.  Zie de figuur. |
| 6p | **9** | Bereken exact de waarden van , en . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Lijnenparen*** | |
|  |  | De lijn heeft vergelijking met .  De lijn heeft richtingscoëfficiënt en gaat door het punt .  Het punt is het snijpunt van de lijnen en . Punt ligt op de grafiek van de functie die wordt gegeven door  waarbij geldt: .  In figuur 1 is voor drie waarden van de situatie weergegeven. De grafiek van is gestippeld weergegeven.  Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijving**figuur 1** |
| 4p | **10** | Bewijs dat voor elke positieve waarde van punt op de grafiek van ligt. |
|  |  |  |
| 3p | **11** | Bewijs dat de grafiek van voor elke waarde van daalt. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Het is voor iedere waarde van mogelijk om **figuur 2**  Afbeelding met diagram, lijn, cirkel  Automatisch gegenereerde beschrijvingeen cirkel door de punten , en te  tekenen. Hierbij wordt de situatie dat en  samenvallen buiten beschouwing gelaten.  De coördinaten van zijn .  Er is één waarde van waarvoor deze cirkel  raakt aan de -as. Het middelpunt (, 0) van  deze cirkel ligt op de -as. Deze situatie is in  figuur 2 weergegeven. |
| 6p | **12** | Bereken de waarde van waarvoor de cirkel  raakt aan de -as. Rond je eindantwoord af  op twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Absolute logaritme*** | |
|  |  | De functie wordt gegeven door  De grafiek van snijdt de lijn met vergelijking in vier punten. |
| 4p | **13** | Bereken exact de -coördinaten van deze vier punten. |
|  |  |  |
|  |  | De functie wordt gegeven door met .  Voor een bepaalde waarde van heeft de grafiek van twee verticale asymptoten met een onderlinge afstand van 20. |
| 4p | **14** | Bereken exact deze waarde van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Lijnstukken bij een exponentiële functie*** | |
|  |  | Afbeelding met lijn, diagram, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvingDe functie wordt gegeven door **figuur 1**  met .  De lijn met vergelijking snijdt de grafiek  van in .  In figuur 1 zijn voor een waarde van de grafiek  van en lijn weergegeven.  Ook is de raaklijn aan de grafiek van door  weergegeven. |
| 5p | **15** | Bewijs dat deze raaklijn voor elke waarde van  door de oorsprong gaat. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In figuur 2 is opnieuw voor een waarde van **figuur 2**  de Afbeelding met diagram, lijn, Perceel  Automatisch gegenereerde beschrijvinggrafiek van weergegeven.  Op deze grafiek liggen de punten ,  en .  Ook is de grafiek van de inverse van  (gestippeld) weergegeven.  De punten , en zijn de beeldpunten van  respectievelijk , en bij spiegeling in de  lijn .  Er is een waarde van waarvoor geldt: |
| 7p | **16** | Bereken exact deze waarde van . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een hoek van 45 graden*** | |
|  |  | Gegeven zijn het punt met coördinaten en de vector .  Ook zijn gegeven het punt en de vector .  Voor geldt: .  Er zijn twee mogelijke posities van , zodat geldt: . |
| 6p | **17** | Bereken algebraïsch de mogelijke coördinaten van beide posities. |

**Wiskunde B** **2024-II**

**Uitwerkingen. (N=2,0)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Twee functies*** |  |
| **1** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * (4, 8) | 1 |
| **2** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  | * ofwel | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * een primitieve is | 1 |
|  | * het antwoord: 12 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Cobb-Douglas-productiefunctie*** |  |
| **3** | **maximumscore 2** |  |
|  | * uit volgt | 1 |
|  |  | 1 |
| **4** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
| **5** | **maximumscore 4** |  |
|  | * als en dan geldt ook | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Loodrecht op de snelheidsvector*** |  |
| **6** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe het maximum met de GR gevonden kan worden | 1 |
|  | * maximale afstand is 1,88 | 1 |
| **7** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * , dus | 1 |
|  | * ofwel   dit geeft | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **8** | **maximumscore 3** |  |
|  | * of | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * ofwel , , en | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Passende parabool*** |  |
| **9** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * top: geeft | 1 |
|  | * geeft ofwel | 1 |
|  | * geeft ofwel | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Lijnenparen*** |  |
| **10** | **maximumscore 4** |  |
|  | * gaat door (10, 4), dus | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en | 1 |
|  | * , dus op de grafiek van . | 1 |
| **11** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  | * voor elke waarde van is , dus is dalend | 1 |
| **12** | **maximumscore 6** |  |
|  | * geeft | 2 |
|  | * geeft ofwel | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden: | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Absolute logaritme*** |  |
| **13** | **maximumscore 4** |  |
|  | * of | 1 |
|  | * of | 1 |
|  | * : en : en | 2 |
| **14** | **maximumscore 4** |  |
|  | * de verticale asymptoten zijn: en | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft :   en | 1 |
|  |  | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Lijnstukken bij een exponentiële functie*** |  |
| **15** | **maximumscore 5** |  |
|  | * geeft | 2 |
|  |  | 2 |
|  | * , dus gaat door |  |
|  | * , de raaklijn in gaat door de oorsprong |  |
| **16** | **maximumscore 7** |  |
|  | * (1, 0), en | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * uit volgt | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Een hoek van 45 graden*** |  |
| **17** | **maximumscore 6** |  |
|  | * uit volgt | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * ofwel : of : | 1 |