**Examen VWO**

**2022**

tijdvak 2

woensdag 6 juli

09.00 – 12.00 uur

**wiskunde B**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Formules*** | |
|  |  |
|  | **Goniometrie** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Gelijke oppervlaktes*** |
|  |  | De functie *f* is gegeven door .  Voor  is de functie *F* gegeven door . Deze is dan een primitieve van *f*. |
| 3p | **1** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | In figuur 1 is de grafiek van f (die uit drie delen bestaat) getekend.  **figuur 1** **figuur 2**  *V* is het gebied begrensd door de grafiek van *f*, de *x*-as en de lijnen met vergelijking  en . *W* is het gebied begrensd door de grafiek van *f*, de *x*-as en de lijnen met vergelijking  en , met .  Er is een waarde van *p* waarvoor de oppervlaktes van *V* en *W* gelijk zijn. |
| 5p | **2** | Bereken exact deze waarde van *p*. |
|  |  |  |
|  |  | De functie g is gegeven door . |
|  |  | In figuur 2 is de grafiek van g getekend.  Deze grafiek is symmetrisch in de lijn .  De grafiek van *g* heeft in punt A een knik.  Zowel aan het deel van de grafiek links van *A* als aan het deel van de grafiek rechts van *A* is er een raaklijn in *A*. Deze twee raaklijnen zijn verschillend. |
| 5p | **3** | Bereken algebraïsch de hoek tussen deze raaklijnen. Geef je eindantwoord in gehele graden nauwkeurig. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Drie op een rij*** |
|  |  | Rechthoek *ADEH* bestaat uit drie vierkanten *ABGH*, *BCFG* en *CDEF*.  Hierbij is  en .  Verder zijn gegeven de  lijnstukken *AF* en *HD*.  *S* is het snijpunt van *AF* en *HD*.  Zie de figuur.  Er geldt: . |
| 3p | **4** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
| 3p | **5** | Onderzoek of de vectoren  en  loodrecht op elkaar staan. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Modeltube*** |
|  |  | In figuur 1 is een cilindervormige koker getekend **figuur 1** **foto**  met diameter 4 cm. Als de cirkel aan de onderkant  wordt samengeknepen tot een lijnstuk, ontstaat  een model voor een tube zonder dop. Op de foto  zie je zo’n tube maar dan met dop. Deze tube, die  bijvoorbeeld shampoo kan bevatten, heeft, zonder  dop, een hoogte van 10 cm en aan de bovenkant  een diameter van 4 cm.  In het vervolg van de opgave worden horizontale  doorsneden van de rechtopstaande modeltube  bekeken.  Het model heeft drie uitgangspunten:   * De doorsnede op hoogte *h*, gemeten vanaf de onderkant, bestaat voor  uit twee halve cirkels en twee evenwijdige lijnstukken van gelijke lengte. * De omtrek van elke doorsnede is gelijk aan de omtrek van de cilinder. * De afstand tussen de twee lijnstukken in de doorsnede is gelijk aan de diameter van de halve cirkels. Deze afstand neemt voor  lineair toe van 0 tot 4. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In figuur 2 is op vier hoogtes de **figuur 2**  doorsnede getekend.  De oppervlakte *A* van een doorsnede  hangt af van de hoogte *h*.  Met behulp van bovenstaande drie  uitgangspunten kan een formule  worden opgesteld voor *A*(*h*).  De inhoud *I* van de modeltube kan  met behulp van deze formule voor  *A*(*h*) worden berekend.  Er geldt: |
| 6p | **6** | Onderzoek of de modeltube 80 cm3  shampoo kan bevatten. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Vierkanten bij een exponentiële functie*** |
|  |  | De functie *f* is gegeven door . **figuur**  Op de grafiek van *f* ligt een punt *P*  met . Zie de figuur.  In de figuur zijn ook de vierkanten *V* en *W*  getekend. Van vierkant *V* is *P* een  hoekpunt en ligt een zijde op de *y*-as. Van  vierkant *W* is *P* een hoekpunt en ligt een  zijde op de *x*-as.  Voor elke waarde van *p* bekijken we de  verhouding:    Er is een waarde van *p* waarvoor *R* maximaal is. |
| 8p | **7** | Bereken exact de maximale waarde van *R*. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Gelijke hoeken*** |
|  |  | Gegeven is de lijn *k* met vectorvoorstelling  en de lijn *l* met  vectorvoorstelling .  De lijnen *k* en *l* snijden elkaar in een punt *S*.  Lijn *m* is een lijn met vectorvoorstelling  .  De waarden van *a* en *b* kunnen zo worden  gekozen dat *m* de scherpe hoek die de lijnen *k* en  *l* met elkaar maken, in twee gelijke hoeken  verdeelt.  In de figuur is deze situatie getekend.  In deze situatie geldt . |
| 4p | **8** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
| 5p | **9** | Bereken exact de waarde van *b*. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Verouderingskromme*** |
|  |  | De Rijksgebouwendienst beschrijft in een handboek manieren om de conditie van gebouwen te bepalen. Op basis van inspecties waarbij voor elk bouwdeel (deel van een gebouw) een **conditiescore** wordt vastgesteld, is het mogelijk plannen voor onderhoud, renovatie en nieuwbouw te maken.  Een conditiescore is een geheel getal van 1 tot en met 6. Conditiescore 1 hoort bij een nieuw bouwdeel. Naarmate de leeftijd van het bouwdeel toeneemt, zal slijtage optreden en daarbij horen hogere conditiescores. Als het bouwdeel niet meer bruikbaar is, krijgt het conditiescore 6.  In een model waarmee de conditiescore van een bouwdeel wordt berekend, wordt gebruikgemaakt van drie variabelen:   * *t* : de leeftijd van het bouwdeel (in jaren), * *L*: de theoretische levensduur van het bouwdeel (in jaren) als het niet wordt onderhouden en * *C*: een getal waarmee de uiteindelijke conditiescore wordt berekend.   Hierbij is . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Oorspronkelijk werd door de inspecteurs van de Rijksgebouwendienst voor een normaal verouderingsproces het volgende verband tussen deze variabelen gehanteerd:  (1)  De uiteindelijke conditiescore werd bepaald door bij de berekende waarde van *C* alle decimalen weg te laten. Zo geldt bijvoorbeeld voor een bouwdeel met een leeftijd die gelijk is aan een kwart van zijn theoretische levensduur dat . In dat geval is de conditiescore gelijk aan 1.  Door het weglaten van de decimalen leveren verschillende leeftijden soms dezelfde conditiescore op. |
| 3p | **10** | Bereken voor een bouwdeel met een theoretische levensduur van 25 jaar gedurende hoeveel jaar dat bouwdeel conditiescore 2 krijgt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig. |
|  |  |  |
|  |  | De Rijksgebouwendienst hanteerde ook een formule waarin *t* is uitgedrukt in *L* en *C*. Deze formule ontstaat door formule (1) te herleiden tot een formule van de volgende vorm:  (2) |
| 4p | **11** | Bepaal de waarden van *a* en *b* door formule 1 te herleiden tot formule 2.  Rond je berekende waarden zo nodig af op drie decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Nieuwe inzichten van de inspecteurs hebben ertoe geleid dat in de loop van de tijd formule 1 is vervangen door:  (3)  In de figuur is van formule 1 en van formule 3 de bijbehorende **verouderingskromme** weergegeven. De kromme die hoort bij formule 1 is gestippeld weergegeven.  Op de verticale as staat *C*; hoge waarden van *C* staan onderaan.  **figuur** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Op de horizontale as staat de leeftijd *t* van een bouwdeel uitgedrukt in de theoretische levensduur *L*. Zo betekent  dat een bouwdeel de helft van zijn theoretische levensduur heeft bereikt.  In de figuur is te zien dat volgens formule 1 conditiescore 3 wordt bereikt als de leeftijd van een bouwdeel bijna 70 procent van de theoretische leeftijd is. Volgens formule 3 bereikt dat bouwdeel conditiescore 3 later dan volgens formule 1. |
| 3p | **12** | Bereken exact na hoeveel procent van de theoretische levensduur het bouwdeel conditiescore 3 bereikt volgens formule 3. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Cosinusgrafiek door hoogste punten*** |
|  |  | Voor elke *p* met  wordt de functie *fp* met domein  gegeven door:    In figuur 1 is voor enkele waarden van *p* de grafiek van *fp* getekend.  **figuur 1**  De grafiek van *f3* heeft behalve de oorsprong een tweede gemeenschappelijk punt met de *x*-as. |
| 4p | **13** | Bereken exact de *x*-coördinaat van dat tweede gemeenschappelijke punt. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | De grafiek van *fp* heeft voor  een hoogste punt voor . Ook voor de andere waarden van *p* heeft de grafiek van *fp* een hoogste punt. In figuur 2 is telkens met een dikke stip het hoogste punt van de grafiek van *fp* aangegeven. De gestippelde kromme verbindt deze hoogste punten met elkaar.  **figuur 2**  Voor de *x*-coördinaat *a* van het hoogste punt van de grafiek van *fp* geldt dat . |
| 4p | **14** | Bewijs dit. |
|  |  |  |
|  |  | De kromme die de hoogste punten van de grafieken van *fp* verbindt, is de grafiek van de functie *g* gegeven door , met . |
| 4p | **15** | Bewijs dit. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Loodrecht door de parabool*** |
|  |  | Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen: **figuur 1**    De bijbehorende baan is een parabool.  Punt *M*(*r*, 0) is een punt op de positieve *x*-as  met .  We kiezen punt  op de parabool  zodanig dat de halve lijn vanuit *M* door *A* de  parabool loodrecht snijdt in punt *A*.  Zie figuur 1.  Er geldt: |
| 6p | **16** | Bewijs dit. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | We voegen de cirkel toe met **figuur 2**  middelpunt *M*(*r*, 0)en straal *r*. Het punt  *O*(0, 0) ligt op deze cirkel en op de  gegeven parabool.  De halve lijn vanuit *M* door *A* snijdt de  cirkel in punt *B*.  Zie figuur 2.  Voor een bepaalde waarde van *r* is *A*  het midden van lijnstuk *MB*. |
| 6p | **17** | Bereken exact deze waarde van *r*. |

**Wiskunde B** **2022-III**

**Uitwerkingen. (N=1,6)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Gelijke oppervlaktes*** |  |
| **1** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
| **2** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * geeft | 2 |
| **3** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * de hellingshoek | 1 |
|  | * de gevraagde hoek is | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Drie op een rij*** |  |
| **4** | **maximumscore 3** |  |
|  | * *AF*:  en *HD*: | 1 |
|  | * geeft  ofwel | 1 |
|  | * met andere woorden: | 1 |
| **5** | **maximumscore 3** |  |
|  | * en | 2 |
|  | * dus | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Modeltube*** |  |
| **6** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 3 |
|  | * GR: | 1 |
|  | * inhoud: 83,77… dus de modeltube kan 80 cm3 shampoo bevatten | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Vierkanten bij een exponentiële functie*** |  |
| **7** | **maximumscore 8** |  |
|  | * oppervlakte *V*:  en oppervlakte *W*: | 2 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * en dus | 1 |
|  | * De maximale waarde van *R* is | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Gelijke hoeken*** |  |
| **8** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 3 |
|  |  |  |
|  | * geeft | 1 |
| **9** | **maximumscore 5** |  |
|  | * en | 1 |
|  | * uit de tweede vergelijking volgt | 1 |
|  | * dit geeft  en dus | 1 |
|  | * *S*(84, 136) | 1 |
|  | * en daarmee wordt | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Verouderingskromme*** |  |
| **10** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe een vergelijking op de GR opgelost kan worden: | 1 |
|  | * en voor de andere , dus 7,2 jaar | 1 |
| **11** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * en | 1 |
| **12** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * , dus na 75% | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Cosinusgrafiek door hoogste punten*** |  |
| **13** | **maximumscore 4** |  |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
| **14** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  | * geeft | 1 |
|  |  | 1 |
| **15** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Loodrecht door de parabool*** |  |
| **16** | **maximumscore 6** |  |
|  | * en | 1 |
|  | * de richtingsvector in *A* () is | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * Loodrecht, dus inproduct is 0: | 1 |
|  | * geeft  ofwel | 2 |
| **17** | **maximumscore 6** |  |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * geeft | 1 |
|  | * omdat  geldt | 1 |