**Examen VWO**

**2023**

tijdvak 2

vrijdag 23 juni

13.30 – 16.30 uur

**wiskunde A**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| OVERZICHT FORMULES | | | |
|  |  | | |
|  | **Differentiëren** | | |
|  | **naam van de regel**  somregel  verschilregel  productregel  quotiëntregel  kettingregel | **functie** | **afgeleide** |
|  |  | | |
|  | **Logaritmen** | | |
|  | **regel voorwaarde** | | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Herbouwkosten in Amsterdam*** |
|  |  | De **herbouwkosten** zijn de kosten waarvoor een woning na afbraak opnieuw gebouwd kan worden. De herbouwkosten zijn voornamelijk afhankelijk van het **vloeroppervlak**, dat is het totale oppervlak van alle verdiepingen met een stahoogte van ten minste 1,5 meter.  De gemeente Amsterdam gebruikt voor verschillende woningtypen verschillende rekenmodellen om de herbouwkosten te berekenen1).  **twee-onder-een-kapwoningen**  Voor twee-onder-een-kapwoningen hanteert Amsterdam het volgende lineaire model:  met  Hierin zijn *H*twee de herbouwkosten voor een twee-onder-een-kapwoning in euro’s per m2 vloeroppervlak en is *V* het vloeroppervlak van de woning in m2. |
| 2p | **1** | Toon aan dat de herbouwkosten van een twee-onder-een-kap-woning met een vloeroppervlak van 180 m2 (afgerond) 243 600 euro zijn. |
|  |  |  |
|  |  | **portiekflats**  Voor portiekflats met  wordt ook een lineair model voor de herbouwkosten per m2 vloeroppervlak ( *H*portiek ) gehanteerd. Dit model is gebaseerd op de volgende gegevens:   |  |  |  | | --- | --- | --- | | *V* (in m2) | 50 | 90 | | *H*portiek (in euro’s per m2) | 2429 | 2080 | |
| 5p | **2** | Bereken met behulp van deze gegevens de maximale herbouwkosten voor een portiekflat met . Geef je antwoord in honderden euro’s. |
|  |  |  |
|  |  | **Hoekwoningen**  Voor hoekwoningen bestaan de herbouwkosten per m2 vloeroppervlak uit een vast bedrag van 1375 euro, met daarbovenop een variabel bedrag dat exponentieel afneemt naarmate het  vloeroppervlak groter  wordt. Zie de figuur.  De formule die wordt  gebruikt is van de vorm  hoek  met .  Op de grafiek in de figuur  liggen de punten (30, 3480)  en (250, 1387). |
| 4p | **3** | Bereken de waarden van *b* en *g* die uit deze gegevens volgen. Geef de waarde van *b* in gehelen en de waarde van *g* in vier decimalen. |

|  |  |
| --- | --- |
| noot 1 | In deze opgave wordt uitgegaan van de regels die in 2017 in Amsterdam golden. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In de regelgeving hanteert men ook de volgende (nauwkeuriger) formule voor hoekwoningen:  met  Hierin zijn *H*hoek de herbouwkosten voor een hoekwoning in euro’s per m2 vloeroppervlak en is *V* het vloeroppervlak van de woning in m2.  De herbouwkosten van een hoekwoning zijn soms lager dan die van een twee-onder-een-kapwoning met hetzelfde vloeroppervlak. |
| 4p | **4** | Bereken voor welke vloeroppervlakken in gehele m2 dit het geval is. |
|  |  |  |
|  |  | De formule  is te herleiden tot de vorm |
| 3p | **5** | Geef deze herleiding. Geef de waarde van *b* in gehelen en de waarde van *g* in vier decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | **tussenwoningen**  De formule die men voor tussenwoningen gebruikt, is:  met  Hierin zijn *H*tussen de herbouwkosten voor een tussenwoning in euro’s per m2 vloeroppervlak en is *V* weer het vloeroppervlak van de woning in m2.  In elk model gaat men ervan uit dat de herbouwkosten per m2 afnemen naarmate het vloeroppervlak groter is. De mate waarin de herbouwkosten per m2 afnemen, verschilt per model. |
| 4p | **6** | Stel de afgeleiden van *H*hoek en *H*tussen op en onderzoek met behulp van een schets van beide afgeleiden bij welke van deze twee woningtypen de mate van afname het grootst is. Licht je antwoord toe. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Groeimodellen*** |
|  |  | In de 18e eeuw werd algemeen aangenomen dat de toename van een populatie dieren kan worden beschreven met behulp van een meetkundige rij. Een model uit die tijd is:  model 1  In dit model geldt:   * *Pn* is de **populatiefractie** na *n* jaar. Dat is de grootte van de populatie als deel van de maximale populatie. *Pn* is dus een getal tussen 0 en 1. * *c* is de **startpopulatiefractie**. Ook dit getal wordt uitgedrukt als een deel van de maximale populatie (en dus geldt ). * *r* is de **reproductiefactor**: een getal dat aangeeft hoe snel een populatie zich per jaar uitbreidt.   Neem aan dat in een bepaald bosrijk gebied een populatie van 165 vossen leeft. De reproductiefactor van de vossen in dit gebied is 1,28 en in het gebied is plaats voor maximaal 500 vossen. |
| 3p | **7** | Bereken met behulp van model 1 na hoeveel jaar dit maximale aantal bereikt zal zijn. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | In model 1 wordt ervan uitgegaan dat een populatie altijd even snel groeit. Dit komt echter niet overeen met de werkelijkheid: als de populatie groeit wordt de ruimte per dier namelijk steeds kleiner, waardoor het moeilijker wordt om voedsel te vinden. Hierdoor zal een populatie steeds minder snel gaan groeien naarmate deze toeneemt.  Een verbeterde versie van model 1 is het **logistische model**:  model 2  De variabelen in dit model hebben dezelfde betekenis als in model 1.  De Oostvaardersplassen is een natuurgebied in de buurt van Lelystad. In 2020 leefden er in dit gebied een groot aantal edelherten. Door dit grote aantal konden andere diersoorten, voornamelijk vogels, zich niet meer goed ontwikkelen. Mede daarom wordt sinds 2021 de populatie door het afschieten van de dieren stabiel gehouden op 500 edelherten.  Neem aan dat er maximaal 2000 edelherten in de Oostvaardersplassen kunnen leven. Er geldt vanaf 2021 dat  en . |
| 3p | **8** | Bereken met behulp van model 2 hoeveel edelherten er in de periode 2021-2023 bij zouden komen als er geen dieren zouden worden afgeschoten. |
|  |  |  |
|  |  | In de rest van deze opgave gaan we bekijken hoe model 2 zich gedraagt bij verschillende waarden van *r*. Als je voor *r* een getal tussen de 0 en 1 invult, dan nadert *Pn* voor iedere startwaarde *c* (met ) naar 0. Je kunt dat beredeneren met de formule voor *Pn*. |
| 3p | **9** | Geef een redenering waaruit blijkt dat wanneer *r* tussen de 0 en 1 is, *Pn* altijd naar 0 nadert. |
|  |  |  |
|  |  | Voor waarden van *r* groter dan 1  wordt het model erg  onvoorspelbaar.  In de figuur is de grafiek getekend  voor  en .  Er is te zien dat de waarde van *Pn*  op den duur heen en weer gaat  springen tussen twee vaste waarden. |
| 3p | **10** | Onderzoek tussen welke twee waarden *Pn* heen en weer gaat springen voor  en . Geef deze waarden in twee decimalen. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Unieke woorden*** |
|  |  | Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend. Dat wil zeggen dat ze niet allemaal uniek zijn. Hoe meer unieke woorden je naar verhouding tegenkomt, hoe moeilijker de tekst is. In deze opgave kijken we naar het percentage unieke woorden in een tekst. Dit percentage wordt bepaald aan de hand van twee grootheden:  *U*: het aantal unieke woorden in een stuk tekst;  *T*: het totaal aantal woorden in dat stuk tekst.  We bekijken de eerste twee zinnen van deze opgave: |
|  |  | Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend. |
| 2p | **11** | Bepaal het percentage unieke woorden in de eerste twee zinnen van deze opgave samen. Geef je antwoord als geheel getal. |
|  |  |  |
|  |  | Van het boek *On The Origin of Species* van *Charles Darwin* is het verband tussen *U* en *T* bepaald. Zie figuur 1.  **figuur 1**  In figuur 1 is op beide assen een  logaritmische schaal gebruikt. De  gestippelde lijn geeft een benadering van  het verband tussen *U* en *T*. Figuur 1 staat  ook vergroot op de uitwerkbijlage.  *On The Origin of Species* bevat in totaal  191 740 woorden en er komen 8842 unieke  woorden in voor. Naarmate je verder leest,  kom je steeds minder nieuwe unieke  woorden tegen. Als je een kwart van dit  boek hebt gelezen, ben je al meer dan de helft van het totaal aantal unieke woorden tegengekomen. |
| 5p | **12** | Bereken met behulp van de gestippelde lijn in de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel procent van het totaal aantal unieke woorden je dan al bent tegengekomen. Geef je antwoord als geheel getal. |
|  |  |  |
|  |  | De taalkundige Gustav Herdan ontdekte **figuur 2**  een algemeen verband tussen *U* en *T* voor  grotere teksten. Dit verband werd door  Harold Stanley Heap bekendgemaakt en  wordt de **wet van Herdan-Heap** genoemd.  De internationale nieuwsdienst Reuters heeft  een database – de zogeheten **RCV1** –  beschikbaar gesteld ten behoeve van  taalonderzoek. Onderzoekers hebben voor  RCV1 het verband tussen *U* en *T* bepaald.  Zie figuur 2, waarin log(*U*) tegen log(*T*) is  uitgezet. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Iemand leest een tekst die bestaat uit de eerste 7432 woorden uit RCV1. |
| 2p | **13** | Ga met behulp van figuur 2 na of deze tekst voldoet aan de wet van Herdan-Heap. |
|  |  |  |
|  |  | Een formule voor de gestippelde lijn in figuur 2 is |
| 3p | **14** | Benader met behulp van deze formule het aantal unieke woorden in de eerste  1 000 000 woorden in RCV1. Geef je antwoord in duizenden. |
|  |  |  |
|  |  | De formule  kan worden herleid tot de vorm . Na afronding van *c* op gehelen geldt . |
| 4p | **15** | Geef deze herleiding en bepaal daarmee *c* in één decimaal. |
|  |  |  |
|  |  | Naarmate je vanaf het begin onafgebroken verder leest in RCV1, komen er steeds minder unieke woorden bij. Vanaf een bepaald totaal aantal woorden komt er (gemiddeld) minder dan één uniek woord per 50 woorden bij. |
| 4p | **16** | Onderzoek bij welk totaal aantal woorden dit het geval is. Geef je antwoord in duizenden. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***London Eye*** |
|  |  | De London Eye is een reuzenrad in **foto**  Londen. Zie de foto.  Een toerist heeft een kaartje gekocht  waarmee hij zelf een dagprogramma kan  samenstellen. Zo’n dagprogramma  bestaat uit een bezoek aan de London  Eye en aan nog twee andere attracties.  Die twee andere attracties mag hij kiezen  uit vijf bekende attracties in Londen.  De toerist mag zelf bepalen in welke  volgorde hij de drie attracties bezoekt. |
| 3p | **17** | Bereken hoeveel verschillende dagprogramma’s de toerist kan maken. |
|  |  |  |
|  |  | De London Eye heeft 32 gondels,  waarin de bezoekers plaatsnemen. Eén  rondgang van een gondel duurt precies  30 minuten. De grafiek in de figuur hoort  bij de hoogte van een van de gondels.  Bij deze grafiek hoort de formule    Hierbij is *h* de hoogte van de gondel boven  de grond in meters en *t* de tijd in minuten  met  om 11.00 uur ’s ochtends. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Deze grafiek hoort echter niet bij de gondel die zich om 11.00 uur bij het instapplatform in het laagste punt bevindt. De grafiek van de gondel die zich om 11.00 uur in het laagste punt bevindt, heeft een formule van de vorm  . |
| 2p | **18** | Bereken een mogelijke waarde van *d*. |
|  |  |  |
|  |  | De gondels draaien met een dusdanig lage constante snelheid dat bij het in- en uitstappen het reuzenrad niet hoeft te worden stilgezet. Deze constante snelheid is even groot als de maximale snelheid waarmee *h* toeneemt of afneemt. |
| 5p | **19** | Bereken deze constante snelheid in km/uur. Geef je antwoord in twee decimalen. |
|  |  |  |
|  |  | Hoe hoger je in het reuzenrad komt, hoe verder je kunt kijken. Met de formule , waarbij *a* de maximale kijkafstand in meters is en *h* de hoogte boven de grond in meters, kun je benaderen hoe ver je kunt kijken vanaf een bepaalde hoogte boven de grond.  Windsor Castle ligt hemelsbreed 40 kilometer van de London Eye vandaan. Op een heldere dag kun je vanuit de London Eye Windsor Castle zien liggen. |
| 5p | **20** | Bereken hoelang je per rondgang vanuit de London Eye op een heldere dag Windsor Castle kunt zien. Geef je antwoord in gehele minuten. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***NS Flex*** |
|  |  | Voor reizigers met het openbaar vervoer verkoopt de NS de zogenaamde NS Flex-abonnementen. Je kunt dan voor elke maand opnieuw het abonnement kiezen waarmee je in die maand in totaal de laagste kosten hebt. Drie van deze Flex-abonnementen zijn Dal Voordeel, Altijd Voordeel en Dal Vrij. In de tabel staan voor deze abonnementen de kosten per maand aangegeven en de kortingen die bij deze abonnementen gegeven worden. In deze opgave beperken we ons tot deze drie abonnementen.  **tabel**   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Dal Voordeel** | **Altijd Voordeel** | **Dal Vrij** | | € 5,- per maand | € 23,- per maand | € 105,- per maand | | 40% korting in het weekend | 40% korting in het weekend | onbeperkt reizen in het weekend | | 40% korting buiten de spits | 40% korting buiten de spits | onbeperkt reizen buiten de spits | | geen korting in de spits | 20% korting in de spits | geen korting in de spits |   Eefje woont in Enschede en werkt in Deventer. Ze reist altijd met de trein naar haar werk. Het aantal dagen dat ze per maand moet reizen is verschillend. Eefje wil een schema maken waaruit ze voor elk mogelijk aantal reisdagen per maand kan aflezen welk abonnement voor haar het voordeligst is. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Voor het maken van dit schema moet rekening gehouden worden met de volgende gegevens:   * Eefjes werkdagen zijn van maandag tot en met donderdag. * Eefjes heenreis is met de trein van 6.16 uur vanuit Enschede. * Eefjes terugreis is met de trein van 17.30 uur vanuit Deventer. * Eefje reist altijd 2e klas en via de goedkoopste route. * Eefje reist alleen voor haar werk met de trein. * De spits is op werkdagen van 6.30 tot 9.00 uur en van 16.00 tot 18.30 uur. * Het tijdstip waarop je incheckt, bepaalt de korting die wordt berekend voor de hele reis. * Een enkele reis Enschede-Deventer vol tarief 2e klas kost € 12,10. |
| 7p | **21** | Maak met behulp van berekeningen een schema waaruit Eefje voor elk mogelijk aantal reisdagen per maand kan aflezen welk abonnement voor haar het voordeligst is. |

**Wiskunde A** **2023-II**

**Uitwerkbijlage.**

**NAAM: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**vraag 12**

Afbeelding met tekst, schermopname, software, Computerpictogram

Automatisch gegenereerde beschrijving

**Wiskunde A** **2023-II**

**Uitwerkingen. (N=2,0)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Herbouwkosten in Amsterdam*** |  |
| **1** | **maximumscore 2** |  |
|  | * euro per m2 | 1 |
|  | * totale herbouwkosten:  euro | 1 |
| **2** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * de totale herbouwkosten zijn: | 1 |
|  | * beschrijven hoe met de GR het maximum berekend kan worden | 1 |
|  | * maximale herbouwkosten zijn 235 200 euro | 1 |
| **3** | **maximumscore 4** |  |
|  | * (30, 2105) en (250, 12) | 1 |
|  | * geeft | 2 |
|  | * geeft | 1 |
| **4** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe de vergelijking met de GR opgelost kan worden | 1 |
|  | * en | 1 |
|  | * voor vloeroppervlakken vanaf 95 m2 tot en met 157 m2 | 1 |
| **5** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 2 |
|  | * en | 1 |
| **6** | **maximumscore 4** |  |
|  | * en | 2 |
|  | * een schets van beide afgeleiden | 1 |
|  | * de grafiek van  ligt onder die van  (maar onder de horizontale as, dus een grotere afname | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Groeimodellen*** |  |
| **7** | **maximumscore 3** |  |
|  | * met | 1 |
|  | * invoer in de GR en kijk in de tabel wanneer | 1 |
|  | * en  dus na 5 jaar | 1 |
| **8** | **maximumscore 3** |  |
|  | * 2022: | 1 |
|  | * 2023:  ongeveer 659 herten | 1 |
|  | * Dat is een toename van 159 herten | 1 |
| **9** | **maximumscore 3** |  |
|  | * de factoren *r*,  en  liggen tussen 0 en 1 | 1 |
|  | * hun product ligt ook tussen 0 en 1 waardoor de uitkomst kleiner wordt en naar 0 nadert | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **10** | **maximumscore 3** |  |
|  | * invoer:  en | 1 |
|  | * de ‘grenswaarden’ zijn 0,53 en 0,78 | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Unieke woorden*** |  |
| **11** | **maximumscore 2** |  |
|  | * 17 unieke woorden van de 21 | 1 |
|  |  | 1 |
| **12** | **maximumscore 5** |  |
|  | * een kwart van het boek: | 1 |
|  | * : dat is op 2,7 cm vanaf 104 | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * je bent dan al | 1 |
| **13** | **maximumscore 2** |  |
|  |  | 1 |
|  | * daar vallen de grafieken nog niet samen, dus voldoet niet | 1 |
| **14** | **maximumscore 3** |  |
|  |  | 1 |
|  | * unieke woorden | 2 |
| **15** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  |  | 2 |
|  |  | 1 |
| **16** | **maximumscore 4** |  |
|  |  | 1 |
|  | * beschrijven hoe de vergelijking  opgelost kan worden | 2 |
|  | * dit is bij 884 000 woorden | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***London Eye*** |  |
| **17** | **maximumscore 3** |  |
|  | * twee andere attracties:  verschillende tweetallen | 1 |
|  | * drie attracties in willekeurige volgorde:  manieren | 1 |
|  | * 60 verschillende dagprogramma’s | 1 |
| **18** | **maximumscore 2** |  |
|  | * de grafiek moet een kwart periode (7,5 minuut) naar rechts verschoven worden | 1 |
|  |  | 1 |
| **19** | **maximumscore 5** |  |
|  | * maximale snelheid:  op tijdstip | 2 |
|  | * beschrijven hoe de maximale snelheid met de GR berekend kan worden | 1 |
|  | * deze is 12,54 m/min ofwel 0,75 km/u | 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **20** | **maximumscore 5** |  |
|  |  | 1 |
|  | * met de GR oplossen geeft | 1 |
|  |  | 1 |
|  | * dit oplossen geeft  en | 1 |
|  | * gedurende 5 minuten is Windsor Castle zichtbaar | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***NS Flex*** |  |
| **21** | **maximumscore 7** |  |
|  | * heenreis buiten de spits en terugreis in de spits |  |
|  | * **Dal Voordeel**: | 1 |
|  | * **Altijd Voordeel**: | 1 |
|  | * **Dal Vrij**: | 1 |
|  | * snijpunt ‘dal voordeel’ en ‘altijd voordeel’: | 3 |
|  | * snijpunt ‘altijd voordeel’ en ‘dal vrij’: |
|  | * t/m : Dal Voordeel   t/m : Altijd Voordeel  of meer: Dal Vrij | 1 |