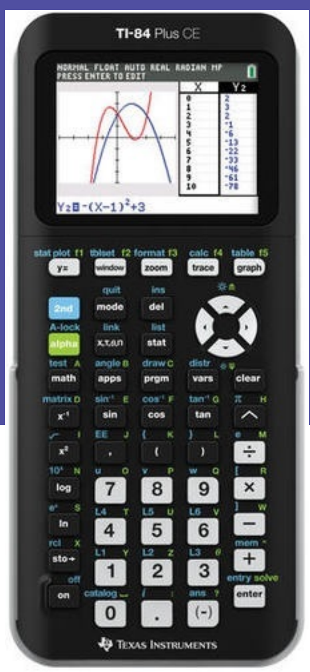
Math4All Practicum GR

TI-84



Inhoud

Basistechnieken TI-84

Als je dit practicum doorwerkt, weet je de eerste beginselen van het werken met de grafische rekenmachine TI-84 van Texas Instruments.

Inhoud

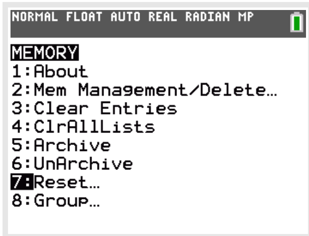
1 De rekenmachine aanzetten

Je zet de machine **aan** door ON te drukken. De betreffende knop zit links onderaan!
Door middel van 2ND ON kun je de machine weer **uit** zetten.

Je ziet nu het scherm oplichten met een knipperende cursor (een blokje) in beeld, of je ziet nog werk van de vorige gebruiker. Zie je (vrijwel) niets, dan moet je het scherm helderder maken door 2ND te toetsen en daarna de pijltjestoets naar boven even vast te houden. (Als dat allemaal niet helpt, raadpleeg dan je leraar!).

De knop CLEAR veegt het **hoofdscherm** schoon, of brengt je naar dit hoofdscherm terug.

Je kunt eenvoudig alle eventueel aanwezige programma's en gegevens wissen:

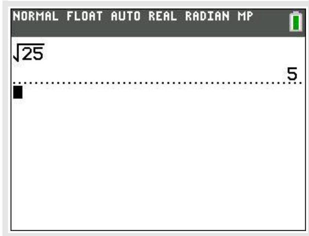


- 2ND + geeft het "MEMORY" menu (memory = geheugen);
- kies met de pijltjestoetsen 7: Reset en dan 1: All RAM en tenslotte 2: Reset.
- (2ND MODE (QUIT) verlaat je dit menu.)

Soms moet je daarna meteen het scherm weer helderder maken omdat ook de helderheidsinstelling weer terugvalt naar de standaardinstelling.

De knop 2ND activeert de "blauwe functie" van een toets.
Bijvoorbeeld: 2ND ^ geeft een benadering van het getal π.
De knop ALPHA activeert de "groene functie" van een toets.
Bijvoorbeeld: ALPHA 1 geeft de letter: Y. Zo kun je je naam schrijven...

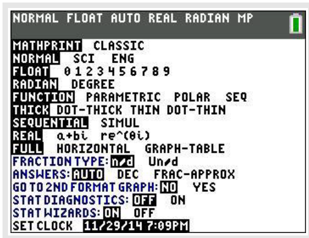
2 Rekenen



In grote lijnen werkt de TI-84 machine net zoals de rekenmachine die je tot nu toe gebruikt hebt, alleen zijn er waarschijnlijk verschillen in de manier van invoeren van de berekening.
In het algemeen zorgt de toets ENTER voor het uitvoeren van een berekening.

Bijvoorbeeld de wortel van 25 bereken je zo: 2ND x^2 2 5 ENTER.

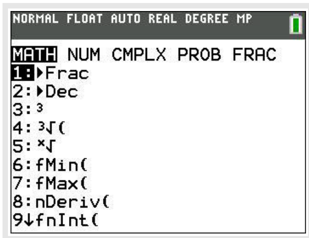
Je ziet dat het scherm een soort kladblok is: je schrijft de berekening gewoon op en met ENTER wordt hij uitgevoerd. De toets waarmee je van teken wisselt (en dus een negatief getal invoert) is (-). Er zijn dus **twee verschillende mintekens**!



Bij berekeningen met sin, cos en tan, moet je erom denken dat je (voorlopig) in graden moet werken. Je kunt dat instellen door op MODE te drukken. Dat is een keuzemenu waar je met behulp van de pijltjestoetsen doorheen kunt lopen. Loop naar "DEGREE" en toets ENTER. Met CLEAR of 2ND QUIT kom je weer in het hoofdscherm.

Je kunt nu $\sin(30°)$ berekenen door in te toetsen: SIN 3 0) ENTER.
Antwoord: 0.5.

Terugrekenen kan zo: 2ND SIN 2ND (-) ENTER.
Antwoord: 30.
Met 2ND (-) (ANS) gebruik je het antwoord (answer) van de vorige berekening.



Voor sommige wiskundige (mathematische) berekeningen is er de knop MATH. Als je die intoetst krijg je vijf tabbladen. Je loopt er weer met de pijltjestoetsen doorheen. Je vindt er een aantal keuzemogelijkheden voor wiskundige berekeningen. Met CLEAR keer je weer terug naar het hoofdscherm.

Als je een opgave fout hebt ingevoerd en daarna berekend, kun je naar die opgave met behulp van de pijltjestoetsen navigeren en hem dan via 2ND ENTER (ENTRY) nog eens in je scherm krijgen. Je kunt vervolgens met de pijltjestoetsen door die opgave lopen. **Verbeteren** kun je hem door:

- over een verkeerd teken het juiste teken te typen;
- met DEL en 2ND DEL (INS staat voor insert (invoegen)) tekens weg te halen en/of in te voegen.

Bekijk nu de rekenvoorbeelden.

Rekenvoorbeelden		
Opgave	**Intoetsen**	**Uitkomst**
0,625 schrijven als breuk	0 · 6 2 5 MATH kies 1: ▶Frac en ENTER	$\frac{5}{8}$
6^2 berekenen	6 x^2 en ENTER	36
de wortel van 36 met 0,1 vermenigvuldigen	2ND x^2 3 6 ▶ × 0 · 1 en ENTER (de pijltjestoets naar rechts is nodig om buiten de wortel te komen)	0.6
6^3 berekenen	6 ^ 3 en ENTER	216
6 delen door $2^3 - 5$; bereken dus $\frac{6}{2^3-5}$	6 ÷ (2 ^ 3 - 5) en ENTER	2
bereken $4\frac{1}{6} - 1\frac{2}{3}$	ALPHA Y=, kies 2: Un/d vul de cijfers in, daarna ▶ - en opnieuw ALPHA Y=, kies 2: Un/d en vul de juiste cijfers in en ENTER ALPHA Y=, kies 2: Un/d kan ook zo: MATH kies FRAC en kies 2: Un/d	$\frac{5}{2}$
bereken $2{,}6 \times 10^6 \times -1{,}14 \times 10^{-5}$	2 · 6 × 1 0 ^ 6 ▶ × (-) 1 · 1 4 × 1 0 ^ (-) 6 ▶ en ENTER	-29.64

Zelf narekenen

a. $(-4)^3 + 6^2 = -28$

b. $3\sqrt{6} + \sqrt[3]{30} \approx 10{,}4557$

c. $\frac{3}{4}\pi \cdot 12^3 \approx 4071{,}504$

d. $\frac{-5+\sqrt{5^2-4 \cdot 0{,}5 \cdot 3}}{2 \cdot 0{,}5} \approx -0{,}6411011$

e. $\frac{-5-\sqrt{5^2-4 \cdot 0{,}5 \cdot 3}}{2 \cdot 0{,}5} \approx -9{,}358899$

f. $-1{,}42 \cdot 10^6 + 0{,}92 \cdot 10^7 = 7780000$

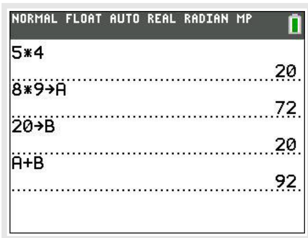
g. $6\frac{5}{7} - 4\frac{7}{8} = \frac{103}{56} \approx 1{,}839286$

h. $\frac{5-12}{8-1} = -1$

3 Doorrekenen met tussenresultaten

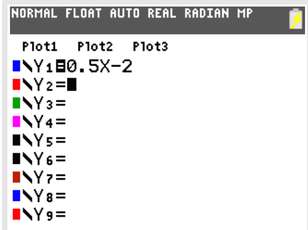
Soms heb je een berekening uitgevoerd, waarvan je het resultaat in een andere berekening nodig hebt. Het resultaat van de oude berekening opnieuw intypen bij de nieuwe berekening is vaak onnauwkeurig en kost veel moeite.
Bij heb je al ontdekt dat je met met [2ND] [(-)] (ANS) je meest recente antwoord (answer) gemakkelijk terug kunt halen. Voor het doorrekenen met oude tussenresultaten heb je de volgende mogelijkheden:

1. Druk in je rekenscherm herhaaldelijk op [▲] totdat je het gewenste oude resultaat hebt geselecteerd. Druk nu op [ENTER]. Het resultaat komt nu achteraan je nieuwe berekening te staan.
2. Soms wil je niet dat het resultaat achteraan je nieuwe berekening komt te staan, maar ergens middenin. Je moet het oude resultaat in dat geval opslaan in je rekenmachine. Haal hiervoor eerst het resultaat terug zoals bij manier 1. Druk vervolgens op [STO▸]. Er verschijnt nu een pijltje achter het resultaat. Achter deze pijl geef je aan welke naam je het opgeslagen resultaat wilt geven. Noem het resultaat bijvoorbeeld [ALPHA] [MATH] (A). Als je nu op [ENTER] drukt, wordt het resultaat opgeslagen met als naam A. Als je het opgeslagen resultaat ergens middenin een nieuwe berekening wilt gebruiken, ga je met je cursor naar de goede plek in de berekening en druk je op [2ND] [STO▸] (RCL). Onderaan je scherm typ je nu de naam van je opgeslagen resultaat in. Als je op [ENTER] drukt, krijg je dit resultaat op je scherm. Je kunt overigens ook gewoon de naam van je opgeslagen resultaat in je nieuwe berekening typen (in dit geval met [ALPHA] [MATH]).
3.



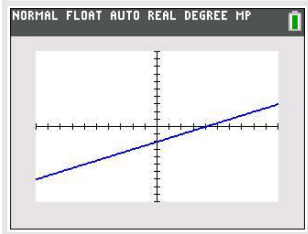
Als je bij het berekenen van een tussenresultaat al weet dat je het later weer nodig gaat hebben, kun je het resultaat direct laten opslaan in je rekenmachine. Dit doe je door aan het eind van je berekening [STO▸] in te toetsen, met daarachter een naam naar keuze. Zodra je de berekening uitvoert, wordt het resultaat opgeslagen in je rekenmachine. Dit resultaat kun je weer op dezelfde manier oproepen als bij manier 2.

4 Grafieken maken



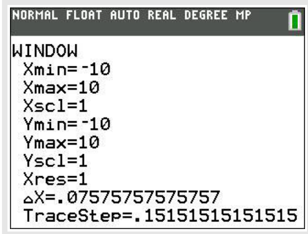
Hét sterke punt van de grafische rekenmachine is het tekenen van grafieken bij een ingevoerde formule. Als je de machine in de MODE: Function zet, kan hij grafieken tekenen bij formules van de vorm $y = \ldots$

Toets MODE en loop met de pijltjestoetsen naar "Function". Vervolgens ENTER en CLEAR.



Je gebruikt voor grafieken vooral de toetsen die direct onder het beeldscherm zitten.

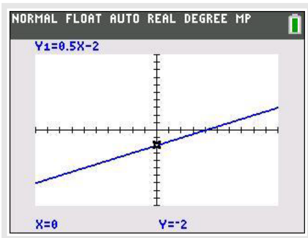
Zo kun je een grafiek tekenen bij de formule $y = 0{,}5x - 2$:



- toets Y= en je krijgt nu een lijst te zien waarin formules van de vorm $y = \ldots$ kunnen worden ingevoerd: Y1, Y2, ..., Y0 (Met de pijltjestoetsen kun je door deze lijst lopen. Met CLEAR haal je reeds ingevulde formules weg);
- plaats de cursor achter Y1= en toets 0.5 X,T,Θ,N - 2; je hebt nu de formule ingevoerd;
- toets daarna GRAPH en in principe krijg je de grafiek in beeld (Dat hoeft echter niet, want het kan zijn dat de grafiek buiten het schermgebied ligt. Toets dan ZOOM en kies met behulp van de pijltjestoetsen ZStandard en ENTER. De grafiek is nu normaal gesproken te zien).

Toets WINDOW en je krijgt de vensterinstellingen te zien. Dus tussen welke waarden de variabele x (van Xmin tot Xmax) loopt en tussen welke waarden de variabele y (van Ymin tot Ymax) loopt. Met de pijltjestoetsen kun je door de lijst gaan en getallen veranderen. Xscl en Yscl leggen de eenheid (scale = schaal) op de assen vast. Experimenteer er maar even mee...

Toets TRACE en je ziet een aantal dingen in je scherm verschijnen: een knipperende cursor op de grafiek bij je formule; de x-coördinaat en de y-coördinaat van die cursor; links boven in het scherm de formule die bij de grafiek van Y1 hoort. Met de pijltjestoetsen kun je nu de cursor over de grafiek verplaatsen en de bijbehorende coördinaten aflezen. Heb je meerdere grafieken, dan kun je met de pijltjestoetsen (omhoog en omlaag) ook van de éne naar de andere springen. De cursor doorloopt de grafiek in sprongen. Het nulpunt (het punt met $y = 0$) is zo dus niet nauwkeurig te vinden. Probeer maar...



Als je de coördinaten van zo'n nulpunt nauwkeuriger wilt vaststellen, moet je de grafiek vergroten: je moet dan **inzoomen** op de grafiek. Toets ZOOM en kies ZBOX ENTER. Je kunt dan met behulp van de pijltjestoetsen een rechthoekje om het gewenste punt tekenen: kies eerst met de cursor een punt bijvoorbeeld links onder het gewenste punt, toets ENTER en gebruik dan een pijltjestoets om het rechthoekje in te stellen, toets weer ENTER en het rechthoekje ligt vast en de grafiek komt vergroot in beeld. Met TRACE kun je nu het nulpunt nauwkeuriger bepalen.

Via 2ND GRAPH (TABLE) krijg je een **tabel** bij de grafiek te zien: een lijst met x-waarden en de bijbehorende y-waarden waar je met de pijltjestoetsen doorheen kunt lopen. De **stapgrootte in de tabel** kun je veranderen via 2ND WINDOW (TBLSET). Je kunt dan TblStart en ΔTbl (de stapgrootte) aanpassen.

Tenslotte nog dit:
Je kunt het beeldscherm van de TI-84 splitsen. Als je bij MODE kiest voor Full (standaard ingesteld), dan krijg je een volledig scherm. Met de keuze HORIZONTAL wordt het scherm horizontaal gesplitst als je GRAPH toetst en kun je in de onderste helft het Y= scherm, of het WINDOW-scherm oproepen. Kies je in MODE voor GRAPH-TABLE zie je de tabel naast de grafiek verschijnen als je GRAPH toetst.

Oefenen

Teken grafieken bij de volgende formules. Kies de beste beeldscherm instellingen om de grafieken in beeld te brengen. Zoek snijpunten met de assen op, maak een tabel bij elke formule.

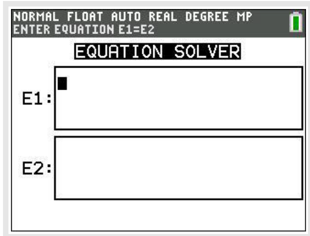
a. $y = -0{,}5x^2 + 8$
b. $y = 20 - x$
c. $y = 10x^2(x - 10)$
d. $y = x^4 - 16$

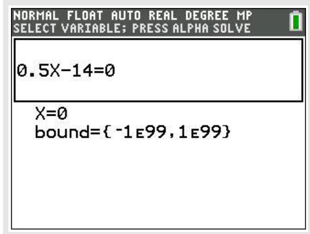
Experimenteer vervolgens een tijdje met iemand samen: geef elkaar verschillende formules op die de ander dan zo mooi mogelijk in beeld moet brengen. Laat elkaar snijpunten met de assen en dergelijke opzoeken.

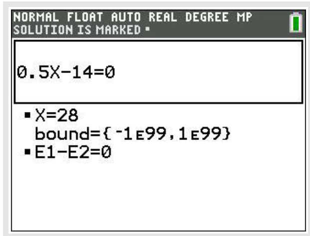
5 Vergelijkingen oplossen

Met de TI-84 machine kun je op diverse manieren vergelijkingen oplossen. Een heel rechtstreekse manier is het gebruiken van de "Solver" (= oplosser). Andere manieren hebben vaak met grafieken te maken. Daarover meer in het practicum: Functies.

Zo kun je deze vergelijking oplossen: $0{,}5x - 2 = 12$.







- schrijf de vergelijking eerst in de vorm: $0 = \ldots$;
  hier: $0 = 0{,}5x - 14$.
- roep vervolgens via MATH ALPHA APPS de solver op in het rekenscherm;
- er zijn nu twee mogelijkheden:
  - je krijgt het scherm hiernaast te zien:
  voer dan achter E1: de vergelijking 0.5 MATH STO⟩ - 14 ENTER.
  Zo kom je bij E2. Achter E2: vul je 0 in. (Met MATH STO⟩ krijg je de letter X, maar dat kan ook via X,T,Θ,N. Je kunt echter ook andere (meerdere) letters in de SOLVE-routine gebruiken.)
  - er staat nog een vorige vergelijking in het scherm, zodat je meteen die vergelijking krijgt te zien. Verwijder deze vergelijking dan eerst en voer daarna de hierboven beschreven stappen uit;
- je hebt nu de vergelijking in beeld en de cursor knippert achter X=; dat betekent dat de rekenmachine een waarde voor X gaat zoeken, te beginnen bij het getal achter X=. bound={-1E99,1E99} betekent dat hij zoekt op het hele gebied dat de rekenmachine bestrijkt, je kunt dit zoekgebied kleiner maken, als je weet welk antwoord er ongeveer uit zal komen;
- toets ALPHA ENTER (SOLVE) en je krijgt het antwoord: X=28. De uitdrukking: E2-E1=0 betekent dat de oplossing exact is gevonden (Het verschil tussen de benadering en de oplossing is 0).

Met enige oefening zal de "Solver" je goede diensten kunnen bewijzen. Er zijn echter wel een paar haken en ogen:

1. Je krijgt zo maar één oplossing, terwijl vergelijkingen wel meerdere oplossingen kunnen hebben.
2. Bij een vergelijking met meerdere oplossingen krijg je misschien niet de oplossing(en) die voor jouw probleem nodig is (zijn).

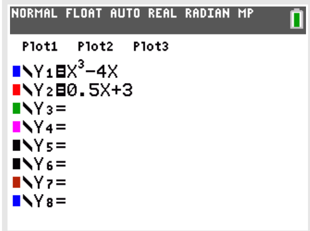
Deze problemen kun je oplossen door het juiste **zoekgebied** in te stellen (achter bound=). Let er dan wel op dat de startwaarde dan ook binnen dit zoekgebied moet vallen!

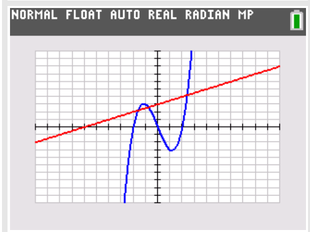
Oefenen

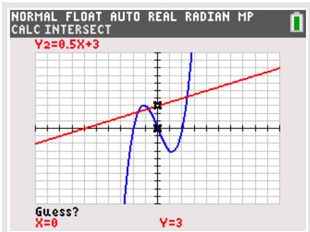
Los de volgende vergelijkingen volledig op (d.w.z. dat je alle oplossingen moet vinden):

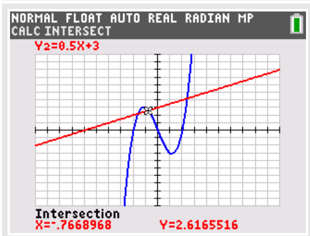
Vergelijking		**Uitkomst**
a	$0{,}05x + 50 = 0{,}25x + 20$	$x = 150$
b	$x^2 - 4x = 12$	$x = 6$ en/of $x = -2$
c	$8x - x^3 = 0$	$x = 0$ en/of $x \approx -2{,}828427$ en/of $x \approx 2{,}828427$
d	$210x^{1,23} = 400$	$x \approx 1{,}688545$

6 Snijpunten van twee grafieken









Voor het bepalen van de snijpunten van twee grafieken kun je TABLE of TRACE gebruiken. Dit gaat echter sneller met het CALC-menu.

Gebruik de formules

$y_1 = x^3 - 4x$ en $y_2 = 0{,}5x + 3$

Als je beide invoert met met de standaardinstellingen (bereik je via ZOOM en kies 6:ZStandard) van het grafiekenvenster, krijg je de drie snijpunten keurig in beeld. Met TRACE of met TABLE kun je ze wellicht vinden. Met 2ND TRACE (CALC) gaat dat zo:

- Kies in het CALC-menu 5: intersect en ENTER.
- Je moet nu in de buurt van het gewenste snijpunt gaan staan met de cursor.
- De rekenmachine vraagt of dit één van de twee grafieken is (First curve ?). Als dat niet zo is (er kunnen nog wel veel meer grafieken in je scherm staan dan die van y_1 en y_2, dan ga je met de pijltjestoetsen (omhoog en/of omlaag) naar een gewenste grafiek en ENTER. Als dat wel zo is, toets je meteen ENTER.
- De rekenmachine vraagt of dit de andere grafiek is (Second curve ?). Als dat zo is, doe je weer ENTER.
- Vervolgens vraagt de rekenmachine of een gok (Guess?) goed is. Als je in de buurt van het gewenste snijpunt staat, doe je ENTER.
- Dan wordt het dichtstbijzijnde snijpunt van y_1 en y_2 berekend.

Bereken de snijpunten van de grafieken van y_1 en y_2.
Als het goed is vind je (in vier decimalen nauwkeurig):
(-1,6312; 2,1844), (-0,7669; 2,6166) en (2,3981; 4,1991).

Functies en de TI-84

De TI-84 rekenmachine kan je behulpzaam zijn bij het werken met functies. Bijvoorbeeld kun je gemakkelijk nulpunten, snijpunten, oppervlakte onder een grafiek, de helling van een grafiek bepalen. Verder kun je functies eenvoudig combineren, zelfs schakelen.
Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI-84** door.

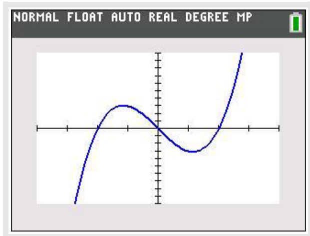
Inhoud

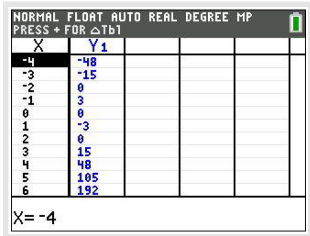
1 Functiewaarden, nulpunten en toppen

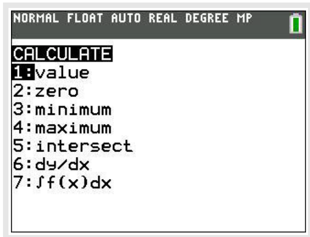
Je weet hoe je een functie kunt invoeren via Y= . Als je eenmaal een functie hebt ingevoerd, kun je er met de verschillende toetsen direct onder het beeldscherm van alles mee doen. De toetsen WINDOW, ZOOM, TRACE en natuurlijk GRAPH heb je al regelmatig gebruikt. Er zijn echter meer mogelijkheden.

Bekijk de grafiek van de functie: $y_1 = x^3 - 4x$.

Breng hem netjes in beeld, kies zodanige vensterinstellingen dat x loopt vanaf -4 t/m 4 en y loopt vanaf -10 t/m 10.







Met 2ND GRAPH bereik je TABLE, waar je een tabel van de functie kunt zien. Met behulp van 2ND WINDOW bereik je TBLSET, waar je de instellingen van de tabel kunt aanpassen. Doe dat tot je de tabel hiernaast krijgt.

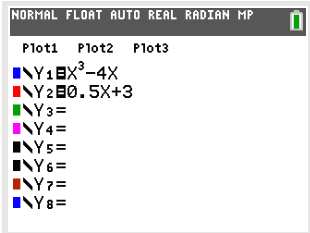
Hieruit zijn sommige karakteristieken van de grafiek van deze functie (de nulpunten) eenvoudig af te lezen.

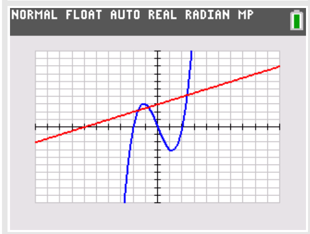
De karakteristieken zijn nauwkeurig te bepalen met behulp van het CALC-menu (calculate = rekenen). Je roept dat op met: 2ND TRACE. Met de zeven routines in het CALC-menu kun je van alles over de grafiek te weten komen:

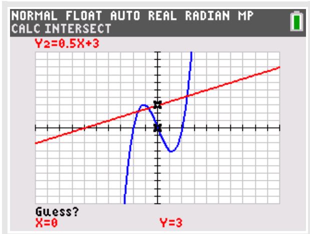
- Met 1: value (value = waarde) bereken je een functiewaarde bij een x-waarde die je zelf mag opgeven. Probeer maar ...
- Met 2: zero (zero = nul) bereken je nulpunten. Dat gaat zo:
  - Kies 2: zero en ENTER.
  - De rekenmachine vraagt nu een linkergrens (Left Bound?) voor x. Loop dan met de cursor over de grafiek tot je links van het nulpunt bent uitgekomen en ENTER.
  - De rekenmachine vraagt nu een rechtergrens (Right Bound?) voor x. Loop dan met de cursor over de grafiek tot je rechts van het nulpunt bent uitgekomen en ENTER.
  - De rekenmachine vraagt nu of een gokje (Guess?) goed is en je doet: ENTER.
  - Als het goed is komt nu (een benadering van) het nulpunt (zowel x als y in beeld onderaan het scherm.

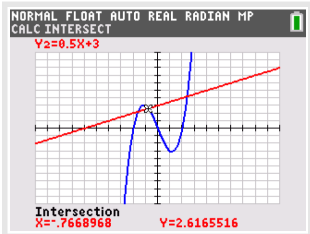
  Controleer dat (-2,0), (0,0) en (2,0) de nulpunten van y_1 zijn.
- Met 3: minimum en 4: maximum kun je toppen berekenen. Dat gaat vrijwel net zo als bij nulpunten. Controleer dat (1,155; -3,079) en (-1,155; 3,079) de toppen van de grafiek van y_1 zijn.

2 Snijpunten van twee grafieken









Voor het bepalen van de snijpunten van twee grafieken kun je TABLE of TRACE gebruiken. Dit gaat echter sneller met het CALC-menu.

Gebruik de formules

$y_1 = x^3 - 4x$ en $y_2 = 0{,}5x + 3$

Als je beide invoert met dezelfde instellingen als je hiervoor alleen voor de grafiek van y_1 hebt gebruikt, krijg je de drie snijpunten keurig in beeld. Met TRACE of met TABLE kun je ze wellicht vinden. Met 2ND TRACE (CALC) gaat dat zo:

- Kies in het CALC-menu 5: intersect en ENTER.
- Je moet nu in de buurt van het gewenste snijpunt gaan staan met de cursor.
- De rekenmachine vraagt of dit één van de twee grafieken is (First curve ?). Als dat niet zo is (er kunnen nog wel veel meer grafieken in je scherm staan dan die van y_1 en y_2, dan ga je met de pijltjestoetsen (omhoog en/of omlaag) naar een gewenste grafiek en ENTER. Als dat wel zo is, toets je meteen ENTER.
- De rekenmachine vraagt of dit de andere grafiek is (Second curve ?). Als dat zo is, doe je weer ENTER.
- Vervolgens vraagt de rekenmachine of een gok (Guess?) goed is. Als je in de buurt van het gewenste snijpunt staat, doe je ENTER.
- Dan wordt het dichtstbijzijnde snijpunt van y_1 en y_2 berekend.

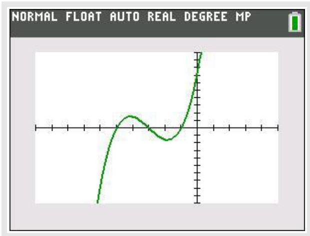
Bereken de snijpunten van de grafieken van y_1 en y_2.
Als het goed is vind je (in vier decimalen nauwkeurig):
(-1,6312; 2,1844), (-0,7669; 2,6166) en (2,3981; 4,1991).

3 Functies combineren

Je kunt met de TI-84 eenmaal ingevoerde functies ook bij andere functies weer oproepen als Y1, Y2, enzovoorts. Ga weer uit van de reeds ingevoerde functies y_1 en y_2 voor respectievelijk Y1 en Y2.

- Als je de grafiek van $y_3 = y_1 + 2y_2$ wilt zien, dan voer je dit in als: Y3 = Y1 + 2Y2.
  - Toets VARS en ga naar Y-Vars en op 1: Function.
  - Daar kun je dan de gewenste y-variabele Y1, Y2, ..., Y9, Y0 kiezen.

  Bekijk de grafiek van y_3 maar eens.
- Als je de grafiek van $y_4 = y_1(x+1)$ wilt bekijken, dan voer je bij Y4 in: Y4 = Y1(X + 1). De grafiek van y_4 is nu eenvoudig te bekijken. Als je daarbij de grafiek van y_2 maar lastig vindt, dan zet je die even uit door in het Y= scherm met de cursor op het = teken achter Y2 te gaan staan en ENTER te toetsen: Y2 is nu "uit", er komt geen grafiek van in het scherm. Vergelijk de grafieken van y_1 en y_4. Probeer te bedenken wat het verband tussen beide is.
- Tenslotte kun je functies schakelen. Bijvoorbeeld vind je de grafiek van $y_5 = y_1(y_2(x))$ door bij Y5 in te voeren: Y5 = Y1(Y2(X)). Bekijk de grafiek van y_5 maar eens. Je ziet hem hiernaast, kun je hem zo in beeld brengen?



Even oefenen

Bepaal de karakteristieken van de volgende functies:

a. $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$
b. $g(x) = f(x-2)$
c. $h(x) = 4 - x^2$
d. $k(x) = f(x) + h(x)$
e. $l(x) = k(0{,}5x) + 4$

4 Families van functies

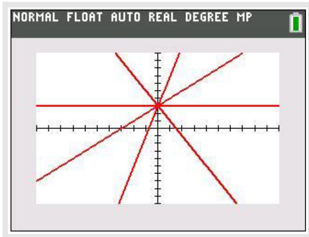
Je kunt ook functies invoeren die ongeveer hetzelfde functievoorschrift hebben.

Alle rechte lijnen door (0,3) bijvoorbeeld hebben het functievoorschrift: $f(x) = ax + 3$.

Stel je voor dat je van deze rechte lijnen de grafieken wilt zien voor $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$ en $a = 4$.

Je maakt dan eerst een lijst van deze vier getallen: {–2,0,1,4} naar L1. Je toetst dit zo in:

[2ND] [(] -2 [,] 1 [,] 2 [,] 4 [2ND] [)] [STO)] [2ND] [1] en [ENTER]



Ga dat na, [2ND] [1] is nodig om L1 (lijst 1) op te roepen.
Vervolgens voer je de functie bij Y2 zo in: Y2 = L1∗X + 3.
Met [GRAPH] krijg je de grafiek van Y1 en de vier rechte lijnen bij Y2 te zien (als je alle andere functies weghaalt of uit zet).

Op dezelfde manier kun je grafieken bij andere families van functies tekenen.

5 Hellingen van functies

Je kunt met de TI-84 op een aantal manieren de helling van een grafiek in een bepaald punt berekenen. Je spreekt wel van het hellingsgetal of de hellingwaarde van een functie $y_1 = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x.

Je kunt zo'n **hellingsgetal** vinden met behulp van het CALC-menu. Gebruik nog steeds de functie $y_1 = x^3 - 4x$ die aan het begin van dit practicum is gegeven. Verwijder alle andere functies uit je rekenmachine.

Stel je voor dat je het hellingsgetal voor $x = 3$ wilt berekenen. Dat kan zo:

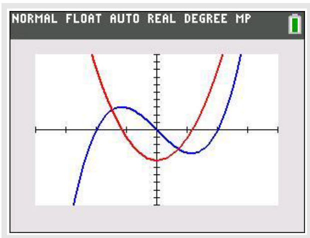
- Kies in het CALC-menu voor het 6: dy/dx en ENTER.
- Tik vervolgens de gewenste x-waarde 3 en ENTER.
- Je vindt nu het gewenste hellingsgetal 23. (Er staat een benadering, meestal niet het precieze hellingsgetal.)

Je kunt ook aan de grafiek van y_1 een lijn tekenen die voor $x = 3$ de gewenste helling heeft, een **raaklijn aan de grafiek** van y_1 voor $x = 3$. Dat gaat via het DRAW-menu (to draw = tekenen).

- Toets: 2ND PRGM en kies 5: Tangent(en ENTER.
- Voer nu in Tangent(Y1,3) en ENTER.
- Je krijgt nu de raaklijn aan de grafiek van y_1 voor $x = 3$ te zien.

Je haalt een lijn die getekend is via het DRAW-menu weg door 2ND PRGM te toetsen en bij het tabblad DRAW 1: ClrDraw te kiezen.

Bepaal zo zelf het hellingsgetal van y_1 voor $x = -1$ en teken de bijbehorende raaklijn.



Ook een **complete hellingsgrafiek** is mogelijk. Als je intoetst:

$y_2(x) = \frac{y_1(x+0.0001) - y_1(x)}{0.0001}$

dan is de grafiek van y_2 een goede benadering voor de hellingsgrafiek van de gegeven functie y_1.

Breng zelf deze hellingsgrafiek van y_1 in beeld.

6 Oppervlakte onder de grafiek

Tenslotte kun je met het CALC-menu de **oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as** bepalen.
Je gebruikt daarvoor de integraal van $y_1 = f(x)$ tussen twee grenzen voor x.

Neem weer de grafiek van $y_1 = x^3 - 4x$.

- Kies bij het CALC-menu 7: $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ en ENTER.
- Je krijgt dan de grafiek en een vraag naar de linkergrens (Lower Limit?) van het gebied onder de grafiek waarvan je de oppervlakte wilt bepalen. Loop met je cursor naar het gewenste punt, of toets de gewenste x-waarde. Toets vervolgens ENTER.
- Vervolgens wordt de rechtergrens (Upper Limit?) gevraagd. Voer de gewenste waarde in en ENTER.
- Het bedoelde gebied wordt nu 'ingekleurd' en de integraal komt onderaan het scherm in beeld.

Bepaal zelf de integraal tussen de grafiek van y_1 en de x-as tussen $x = 0$ en $x = 2$.
Je vindt als alles goed gaat -4.

Let wel: dit is **niet** de oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as, maar de integraal. Dat betekent dat het gebied tussen $x = 0$ en $x = 2$ als negatief wordt geteld! De oppervlakte tussen de grafiek en de horizontale as tussen $x = 0$ en $x = 2$ is dus 4.
Als het gebied waarvan je de oppervlakte wilt weten zowel boven als onder de x-as ligt, moet je het bij nulpunten opsplitsen!

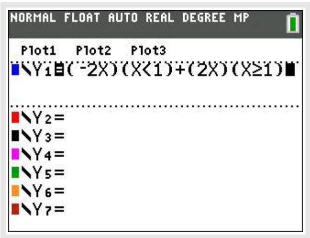
7 Functies die uit meerdere delen bestaan

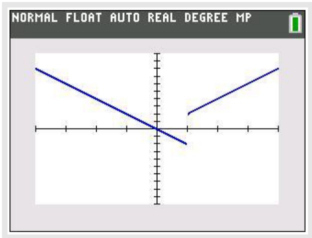
Soms bestaat een functie uit meerdere delen. Stel je voor dat het voorschrift van een functie f luidt:

$f(x) = -2x$ als $x < 1$

$f(x) = 2x$ als $x \geq 1$

Om zo'n functie te kunnen invoeren in je grafische rekenmachine maak je gebruik van het TEST-menu (via 2ND MATH). Daarmee kun je de kleiner- en de groterdantekens invoeren (ook kleiner-of-gelijk en groter-of-gelijk). Hier zie je hoe je zo'n functie invoert met daarnaast het resultaat.





Integralen en de TI-84

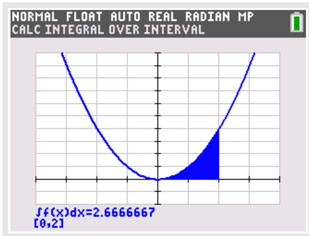
Met de TI-84 kun je eenvoudig integralen berekenen. Je kunt echter ook Riemannsommen laten berekenen.
Loop eerst de practica: **Functies en de TI-84** en **Rijen en de TI-84** door.

Inhoud

1 Integralen benaderen

Met de TI-84 kun je integralen rechtstreeks berekenen (benaderen) vanuit het functievoorschrift m.b.v. het CALC-menu. Dat CALC-menu vind je via 2ND TRACE.

Neem de functie $f(x) = x^2$.
Stel je voor dat je de integraal van deze functie over het interval [0,2] wilt weten. Je wilt dus berekenen: $\int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x$.



- Druk op Y= en vul $f(x)$ in bij Y1.
- Stel als venster bijvoorbeeld $-4 \leq x \leq 4$ bij $-2 \leq y \leq 10$ in en bekijk de grafiek.
- Druk op 2ND TRACE en kies in het CALC-menu 7: $\int f(x) \, \mathrm{d}x$.
- Je krijgt dan de grafiek te zien en een vraag naar de linkergrens (Lower Limit ?) van het gebied onder de grafiek waarvan je de integraal wilt bepalen. Loop met je cursor naar het gewenste punt, of toets de gewenste x-waarde en ENTER.
- Vervolgens wordt de rechtergrens (Upper Limit ?) gevraagd. Voer de gewenste waarde in en ENTER.

Het bedoelde gebied wordt nu ingekleurd en de benadering van de integraal komt onderaan het scherm in beeld.

Je vindt als alles goed gaat 2,6667 (Wat je natuurlijk net zo eenvoudig door primitiveren had kunnen vinden.)

Met 2ND PRGM (DRAW-menu) en 1: ClrDraw haal je de inkleuring weer weg.

Oefen jezelf met lastiger functies, met name met functies die je moeilijk of niet kunt primitiveren. Bekijk ook nog eens het verschil tussen de oppervlakte tussen de grafiek en de x-as op een bepaald interval en de bijbehorende integraal.

Een andere manier om deze integraal te berekenen is via het MATH-menu:

- Kies MATH en dan 9: fnInt(.
- Vul nu de integraal in zoals hij hierboven beschreven staat, dus $\int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x$.
- Toets ENTER om de benadering uit te voeren.

Ga na, dat je ook nu 2,666... vindt.

2 Ondersom en bovensom

De integraal van de grafiek van $f(x) = x^2$ op het interval [0,2] kun je benaderen door dit interval per eenheid in n gelijke deelintervallen te verdelen (in totaal zijn er op [0,2] dus $2n$ deelintervallen).
Omdat deze functie op dit interval overal stijgend is, is de **ondersom** gelijk aan:

$$\underline{S_n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

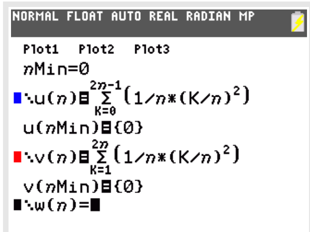
De **bovensom** is:

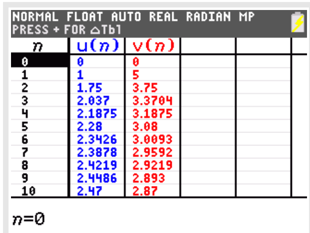
$$\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Het gaat hierbij dus om sommen van de rij t_k met directe formule:

$$t_k = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Voor n worden steeds verschillende getallen gekozen, afhankelijk van het aantal deelintervallen waarin je [0,2] verdeelt.
De ondersom en de bovensom kunnen als rijen getallen worden ingevoerd:





- Voer in de seq-mode het functievoorschrift van de ondersom: $u(n) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$ en de bovensom: $v(n) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$ in.
- Ga in eerst naar [Y=] en haal de sommatie op bij [MATH] 0: summation Σ en [ENTER].
- Vul dit vervolgens in zoals je in de figuur ziet, de K krijg je via [ALPHA] [(].
- Doe dit voor beide rijen en bekijk hun grafieken en tabellen.

Je ziet, dat ondersom en bovensom elkaar naderen naarmate n groter wordt.

Denk er om dat deze werkwijze alleen opgaat bij functies die op het hele integratieinterval stijgend zijn of op het hele integratieinterval dalend zijn! Is dit niet het geval dan kun je niet met rijen werken.

Even oefenen

Oefen het benaderen van integralen met onder- en bovensommen.

Kansverdelingen en de TI-84

Met de TI-84 kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Je moet voor dat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de TI-84 en het werken met functies op deze rekenmachine. Doe eventueel eerst de bijbehorende practica.
Loop (ook) eerst het practicum: **Simulaties en telsystemen** door.

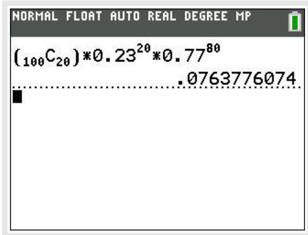
Inhoud

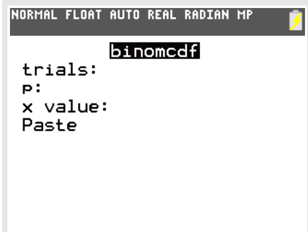
1 De binomiale kansverdeling

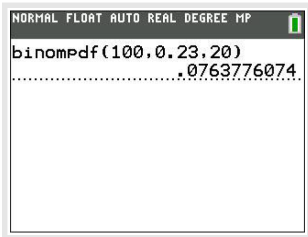
Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0{,}23 = 0{,}77$ is. De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0{,}23^k \cdot 0{,}77^{100-k}$$

hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(n-k)!}$ wat er op de TI-84 uitziet als 100 nCr k of $_{100}C_k$.







De kans $\mathrm{P}(X = 20)$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen:

- Voer in 100 en MATH ga naar de tab PROB en kies 3: nCr (als je de pijltjestoetsen gebruikt moet je ook nog ENTER toetsen).
- Vervolg met 20 ▶ × .23 ^ 20 ▶ × .77 ^ 80 en ENTER.

Het antwoord zie je in het venster hiernaast.

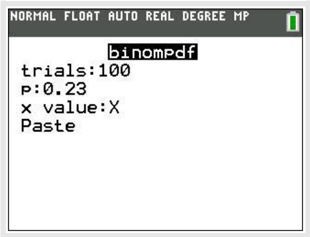
Dit kan echter gemakkelijker. De TI-84 kent namelijk de functie "binompdf" (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

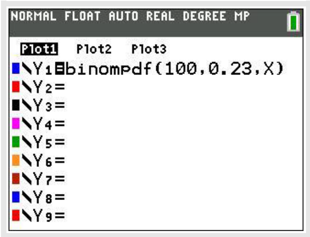
- Toets 2ND VARS, je hebt dan het DISTR-menu (distribution = verdeling).
- Kies A: binompdf en ENTER (als je niet de pijltjestoetsen gebruikt maar alleen A toetst is ENTER overbodig).
- Je ziet dan een venster waarin je waarden kunt invoeren. Als dit niet het geval is, druk dan op MODE en zet STAT WIZARDS op ON.
- Voer bij trials 100 in, bij p 0.23 en bij x value 20.
- Ga vervolgens naar Paste en druk op ENTER. De functie verschijnt nu in je rekenscherm.
- Druk nog eens op ENTER om de berekening uit te voeren.

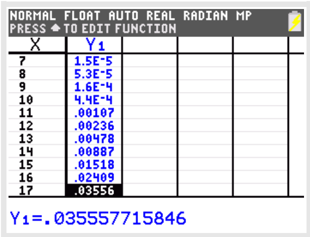
Op deze manier kun je ook $\mathrm{P}(X \leq 20)$ berekenen door binomcdf(te kiezen.
Voor andere varianten moet je vervolgens omrekenen.
Ga na:

- $\mathrm{P}(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2810...$
  2ND VARS en kies B: binomcdf(en vul de juiste waarden voor trials, p en x value in en voer de berekening uit.
- $\mathrm{P}(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 19) = 0{,}2046...$
- $\mathrm{P}(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 19) = 0{,}7953...$
- $\mathrm{P}(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}7189...$
- $\mathrm{P}(10 \leq X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = \mathrm{P}(X \leq 20) - \mathrm{P}(X \leq 9) = 0{,}2808...$
- $\mathrm{P}(10 < X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}2040...$

Een **complete kansverdeling** is nu eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in het Y= scherm als functie in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet:





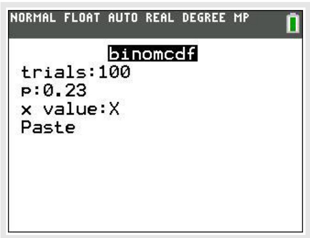


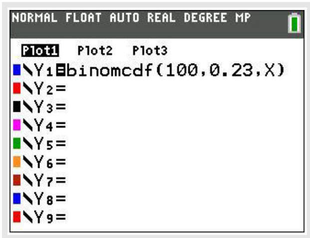
2 Grenswaarden bij binomiale kansverdelingen

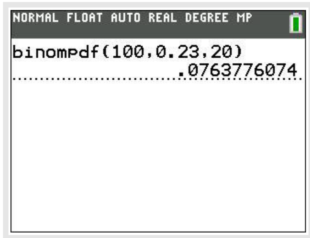
Vooral bij het toetsen van hypothesen wil je **grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen**.
Het gaat dan om problemen als:

Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) = 0{,}10$.

Je moet daarvoor zelf een cumulatieve kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in het Y= scherm en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 17$.





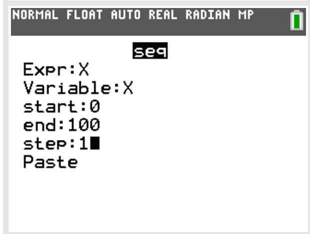


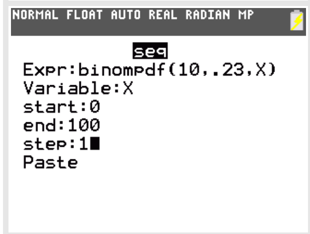
Er zijn weer varianten mogelijk, bijvoorbeeld:

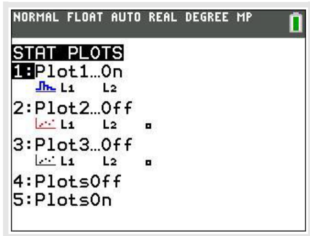
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X < g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  De waarde 17 die je krijgt is dan dus $g - 1$, zodat nu $g = 18$.
- Bepaal de waarde van g waarvoor: $\text{P}(X \geq g | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) < 0{,}10$.
  In dit geval gebruik je dat $\text{P}(X \leq g - 1 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}23) > 0{,}90$.
  Ga na, dat nu $g = 29$.

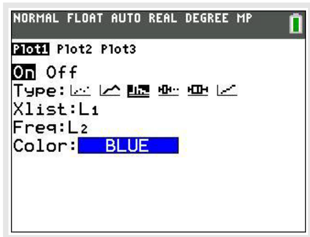
3 Kanshistogrammen

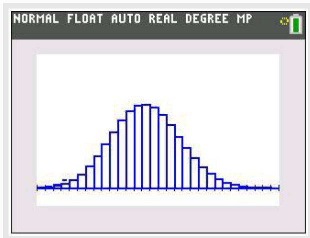
Bij een binomiale kansverdeling kun je een kanshistogram maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0{,}23$. Dat kun je zo doen:











- Toets STAT en kies 1: Edit... Je ziet nu een aantal lijsten L1, L2, enzovoorts.
  (Maak eventueel eerst de eerste twee lijsten leeg via STAT 4: ClrList L1, L2.)
- Voer in L1 de waarden voor de stochast $X = 0,1,2,...,100$ in door de cursor op L1 te zetten en ENTER te toetsen. Onderaan zie je nu L1= met daarachter de cursor.
- Ga naar 2ND STAT en naar de tab OPS en kies 5: seq.
  Een nieuw venster opent. Zet achter Expr en Variable beide een X.
  Zet bij start 0, bij end 100 en bij step 1.
  Ga nu naar Paste en druk twee keer op ENTER.
  In L1 staan nu de getallen 0 t/m 100. Ga dat na door met de pijltjes toetsen door de lijst te lopen.
- Voer in L2 de kansen in door de cursor op L2 te zetten en ENTER te toetsen.
  Onderaan zie je nu L2= met daarachter de cursor.
  Ga naar 2ND STAT en naar de tab OPS en kies 5: seq. Een nieuw venster opent.
  Ga achter Expr staan en 2ND VARS en kies A: binompdf.
  Je ziet nu binompdf(achter Expr verschijnen. Vul in: 100, 0.23 en X en Paste ENTER.
  Zet achter Variable X, bij start 0, bij end 100 en bij step 1.
  Ga vervolgens naar Paste en druk twee keer op ENTER.
  Nu staan in L2 de bijbehorende kansen. Controleer dat.
- Nu je de lijsten L1 en L2 hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken met behulp van STAT PLOT. Je bereikt dat met: 2ND Y=. Kies je voor 1: Plot1, dan kun je het eerste diagram instellen, je ziet de figuren hiernaast.
- Kies voor On ENTER en loop met de pijltjestoetsen naar en door Type. Kies het type plaatje, controleer of Xlist op L1 en Freq op L2 staat ingesteld. Indien dat niet het geval is, zorg daar dan voor (Je vindt L1, L2, enzovoorts op de cijfertoetsen via 2ND). Door GRAPH te toetsen zou het gekozen diagram in beeld moeten komen, afhankelijk van de scherminstellingen. Omdat er alleen voor x van 10 t/m 40 kansen uitkomen die in beeld zijn te brengen, stel je voor x ook die waarden in. De uitkomsten liggen dan tussen 0 en 0,15.

Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Cumulatieve kanshistogrammen lukken ook.

Als je een kansverdeling als lijst in de TI-84 hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- Het centrum van de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met μ_X of $\overline{X}$.
- De spreiding van de kansverdeling van X is de **standaardafwijking**, aangegeven met σ_X.

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, toets je STAT, ga ja naar de tab CALC en dan 1: 1-Var Stats. Kies voor List de lijst met je waarnemingsgetallen (L1) en voor FreqList de lijst met kansen (L2) en Calculate ENTER.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. De verwachting is 23 en de standaarddeviatie in ongeveer 4,21.

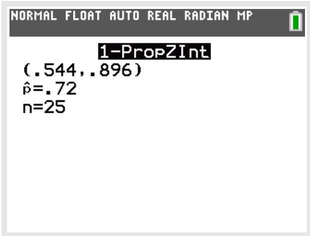
4 Betrouwbaarheidsinterval bij proporties

(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om de proportie p te schatten.
Het aantal successen in deze steekproef is 18

Bepaal het 95% betrouwbaarheidsinterval van de proportie.



- Toets STAT en ga naar de tab TESTS en kies A: 1-PropZInt;
- voer vervolgens in x: 18 en n: 25 en C-Level: 0.95 (C van confidence) en Calculate ENTER;
- je krijgt het gevraagde betrouwbaarheidsinterval [0,544; 0,896] en ook zie je de proportie $0{,}72 = \frac{18}{25}$. Zie de figuur.

In drie decimalen nauwkeurig ligt het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie tussen 0,544 en 0,896.

5 De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van $\mu_X = 100$ en een standaardafwijking van $\sigma_X = 6$, dan kun je de volgende kansen berekenen met de TI-84.

- $\text{P}\left(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}4282...$
  Toets 2ND VARS om bij DISTR (distributions = verdelingen) te komen.
  Kies normalcdf(en ENTER.
  Vul bij lower(ondergrens) 95 in, bij upper(bovengrens) 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar paste en druk tweemaal op ENTER.
- $\text{P}\left(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}2023...$
  Toets 2ND VARS en kies normalcdf(en ENTER.
  Vul bij lower(ondergrens) -1000 in, bij upper(bovengrens) 102 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar paste en druk tweemaal op ENTER.
- $\text{P}\left(X > 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 1 - \text{P}\left(X < 95 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}7976...$
  Toets 2ND VARS en kies normalcdf(en ENTER.
  Vul bij lower(ondergrens) 95 in, bij upper(bovengrens) 1000 en vul ook μ en σ in zoals hierboven gegeven. Ga vervolgens naar paste en druk tweemaal op ENTER.

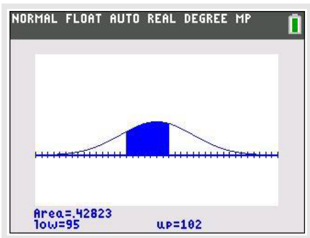
Loop al deze berekeningen zelf na!

Bij een normale kansverdeling kun je op de TI-84 de te berekenen kansen als oppervlakte onder de normaalkromme in beeld brengen. Daartoe gebruik je het menu DISTR.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen en **in beeld brengen als oppervlakte onder de normale verdeling**:

$\text{P}\left(95 < X < 102 \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}4282...$

Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld x laat je tussen 80 en 120 lopen en y (dat zijn de waarden bij de normaalkromme) tussen - 0,1 en 0,2. Zorg dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:



- 2ND VARS en naar de tab DRAW en je kiest 1: ShadeNorm(ENTER.
- Een nieuw venster opent. Vul de gegevens hetzelfde als hierboven in, ga naar Draw en druk weer op ENTER.
- De figuur hiernaast komt dan in beeld.

Met 2ND PRGM 1: ClrDraw gaat een figuur weer weg.

6 Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling kan ook gemakkelijk met de TI-84. Je wilt dan bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken:

- $\text{P}\left(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$
  Toets 2ND VARS en kies 3: invNorm(.
  Voer vervolgens in 0.20, 100 en 6 (in die volgorde) en Paste ENTER;
  Je vindt $g = 94{,}95027...$ dus $g \approx 95$.
- $\text{P}\left(X > g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$ geeft $\text{P}\left(X < g \mid \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}80$
  Dit doe je dan op een vergelijkbare wijze, nu krijg je $g \approx 105$.

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!

7 Betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden

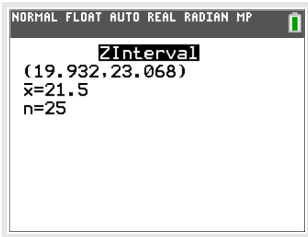
(Dit wordt gebruikt bij HAVO wiskunde A en is daarom speciaal daarvoor aangepast aan de daarbij behorende formulekaart.)

Soms wordt er gevraagd naar een betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde. Dat bereken je met een speciale functie: z-interval.

Stochast X is verdeeld met standaardafwijking $\sigma_X = 4$.
Er wordt een steekproef van omvang $n = 25$ genomen om het populatiegemiddelde te schatten.
Het gemiddelde van deze steekproef $\overline{X} = 21{,}5$.

Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

Omdat het hier gaat om de schatting van het gemiddelde met een steekproef mag je aannemen dat dat gemiddelde normaal verdeeld is en dus de z-verdeling gebruiken.



- Toets STATS en ga naar TESTS en kies 7: ZInterval.
- Kies bij Inpt voor STATS en ENTER.
- Vul in σ: 4, x̄: 21.5, n: 25 en C-level: 0.95 en Calculate ENTER.

In de figuur zie je het resultaat.

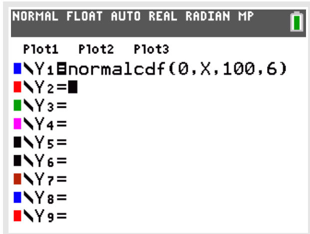
Het betrouwbaarheidsinterval ligt dus tussen 19,9 en 23,1.

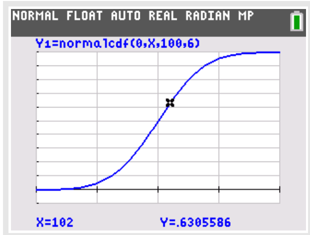
8 Gemiddelde of standaardafwijking berekenen

Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf. Je kunt in het Y= scherm de cumulatieve normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en vooral bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$\mathrm{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right)$





Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld laat je x lopen tussen 80 en 120 en laat je y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen - 0,1 en 1. Zorg dat er geen andere functies zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- Y= om het invoerscherm te openen;
- 2ND VARS en je kiest 2: normalcdf(;
- In het verschenen venster vul je bij de ondergrens 0 in en bij de bovengrens X. Vul ook μ en σ zoals ze hierboven staan in.
- Ga naar Paste en druk tweemaal op ENTER.
- Plot vervolgens de grafiek door op PLOT te drukken.

Toets je nu TRACE dan kun je met de cursor over de grafiek lopen en kansen bepalen. Dat is echter nogal grof. Via het CALC-menu en Value kun je de gevraagde kans bepalen: 0,6305...

Op deze manier kun je gemakkelijk terugrekenen vanuit een gegeven kans. Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$\mathrm{P}\left(X < g \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}20$

Je voert dan voor y_1 de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor y_2 de gegeven kans 0,2. Met behulp van CALC 5: intersect vind je dat $g = 94{,}95027...$, dus $g \approx 95$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X de **standaardafwijking** bepalen als gegeven:

$\mathrm{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = 100 \text{ en } \sigma_X = ??\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij y_1 normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = 100$ en $\sigma = x$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en y loopt van 0tot 1 (cumulatieve kansen).
- Laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 7{,}8943....$

Dus is de standaarddeviatie in dit geval $\sigma \approx 7{,}9$.

Je wilt van een normaal verdeelde kansvariabele X het **gemiddelde** bepalen als gegeven:

$\text{P}\left(X < 102 \,\middle|\, \mu_X = ?? \text{ en } \sigma_X = 6\right) = 0{,}6$

Je gaat dan zo te werk:

- Voer bij y_1 normalcdf in met als onder- en bovengrens 0 en 102, $\mu = x$ en $\sigma = 6$.
- Stel het venster zo in dat x (dat is nu gemiddelde!) loopt van 80 tot zeg 120 en y loopt van 0tot 1 (cumulatieve kansen).
- laat de rekenmachine het snijpunt berekenen: $x = 100{,}4799....$

Dus is het gemiddelde in dit geval $\sigma \approx 100{,}5$.

Matrixrekening en de TI-84

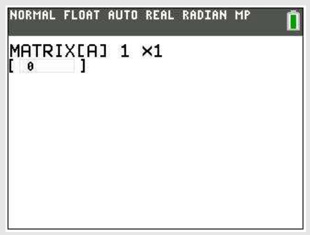
De TI-84 kan je behulpzaam zijn bij het rekenen met matrices. Hij kent daarvoor het menu MATRIX. Vooral bij machten van matrices is deze rekenmachine erg handig. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI-84** door.

Inhoud

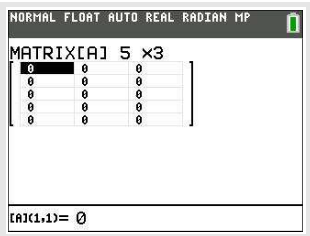
1 Matrices invoeren

Een matrix invoeren doe je als volgt

- Toets 2ND x^{-1}, ga naar de tab EDIT en kies dan één van de 10 mogelijke invoerletters, bijvoorbeeld 1: [A] en ENTER.
- Je krijgt nu het openingsscherm van matrix A. Daar staat dan zo iets:



  Maar er kan ook al een complete matrix ingevuld staan.
- Op de bovenste regel voer je achter MATRIX[A] de afmetingen in: rij × kolom, dus eerst het aantal rijen, dan ENTER en dan het aantal kolommen en ENTER. Je ziet de matrix de juiste afmetingen aannemen, bijvoorbeeld:.



- Onderaan zie je dat het element op de eerste rij en de eerste kolom kan worden ingevoerd. Nu ga je de matrix vullen: je voert steeds een getal in en ENTER. De cursor springt vanzelf naar de volgende invulpositie, de matrix wordt rij voor rij gevuld.
- Na het laatste element te hebben ingevuld kun je het matrix-menu makkelijk verlaten via 2ND MODE (QUIT). De matrix [A] is nu volledig ingevoerd.

Voer zelf een matrix A in.

Zo kun je naar believen meerdere matrices invoeren, maximaal 10. De afmetingen kunnen niet groter zijn dan maximaal 99 rijen en 99 kolommen (afhankelijk van het nog beschikbare geheugen van je rekenmachine).

2 Matrices oproepen en ermee rekenen

Elke matrix die je hebt ingevoerd kun je oproepen in het rekenscherm door:

- Toets 2ND x^{-1}, en kies bij de tab NAMES de gewenste matrix [A], [B], t/m [J]. Deze verschijnt nu in je rekenscherm.
- Toets ENTER en je krijgt de matrix in beeld.

Onthoud wel goed bij welke letter je een bepaalde matrix hebt ingevoerd!

Aan eventuele schuifpijltjes kun je zien dat de matrix groter is dan je beeldscherm. Met behulp van de pijltjestoetsen kun je dan de overige elementen bekijken.

Je kunt een matrix een nieuwe letter geven, door hem te kopiëren naar een andere matrix. Bijvoorbeeld [A] naar [B]: [A] oproepen, STO⟩ toetsen en dan [B] oproepen en ENTER.

Om met matrices te kunnen **rekenen**, moet je de juiste matrixletter(s) oproepen in het rekenscherm. Je kunt dan de normale matrixbewerkingen uitvoeren, namelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een getal, vermenigvuldigen, machtsverheffen.
Uiteraard gelden dan wel de gebruikelijke rekenregels voor het vermenigvuldigen van matrices.

Soms moet je juist de **getransponeerde matrix** A^T gebruiken om mee te rekenen. Zet dan eerst de naam van de matrix die je wilt transponeren in je rekenscherm. Toets 2ND x^{-1} en kies de tab MATH en vervolgens 2: $^{\mathrm{T}}$. Vervolgens druk je in je rekenscherm op ENTER. Je krijgt dan de getransponeerde van de gekozen matrix.

Even oefenen

Oefen het rekenen met matrices en controleer nog eens dat je grafische rekenmachine alle rekenregels voor matrices kent.

3 De elementen van een matrix afronden

Soms verschijnen er decimalen, vooral bij overgangsmatrices kan dit het geval zijn. Het is dan mogelijk om de elementen van de matrix af te ronden:

- Voer eerst een matrix in met veel decimalen, of kijk of er al zo'n matrix is ingevoerd.
- Toets MATH en ga naar de tab NUM en kies 2:round(.
- In het rekenscherm krijg je nu: round(Roep vervolgens de gewenste matrix op, bijvoorbeeld [A]. Maak in het rekenscherm: round([A],2) als je wilt afronden op twee decimalen en toets ENTER.
- Je krijgt nu de afgeronde matrix in beeld.

Even oefenen

Voer dit zelf een paar keer uit.

Parameterkrommen en de TI-84

De TI-84 kan krommen tekenen die worden gegeven door x als functie van t en y als functie van t. De variabele t heet de **parameter** van de kromme, je kunt hem opvatten als de "tijd". Op elk tijdstip t kun je met behulp van de functies $x(t)$ en $y(t)$ berekenen op welke plaats (x,y) het punt dat de kromme doorloopt zich bevindt. Ook kan deze rekenmachine hellingsgetallen berekenen in elk punt van de kromme.

Een andere manier om krommen te beschrijven is met behulp van poolcoördinaten. Daarover gaat het laatste deel van dit practicum.

Loop eerst het practicum: **Functies en de TI-84** door.

Inhoud

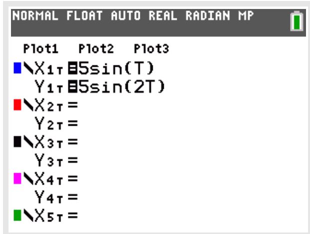
1 Een parameterkromme tekenen

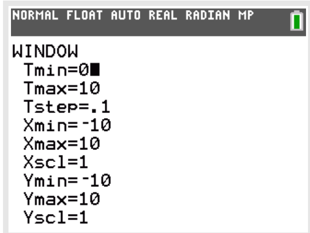
Stel je voor dat je de kromme K wilt tekenen gegeven door:

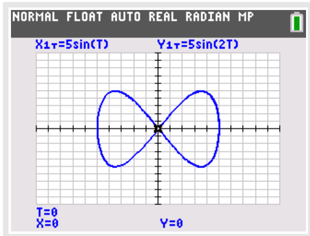
$x(t) = 5\sin(t)$ en $y(t) = 5\sin(2t)$, met t lopend van 0 tot en met 2π.

Je zet dan eerst de rekenmachine in de juiste stand:

- Toets MODE en kies voor RADIAN ENTER (voor werken in radialen) en PARAMETRIC ENTER (voor parameterkromme).
- Via 2ND MODE (QUIT) verlaat je dit scherm.







Vervolgens ga je via Y= de kromme invoeren.
Als je op die knop drukt krijg je het scherm hiernaast, meestal zonder ingevoerde kromme, maar er kan ook nog werk van een vorige gebruiker in staan. Vervolgens voer je de twee functies $x(t)$ en $y(t)$ in, net zoals je dat bij gewone functies doet. Ook nu werk je met X,T,Θ,N om de variabele t in te voeren, hier levert dat een T op.
In de figuur zie je de kromme op de juiste wijze ingevoerd.

Voordat je de grafiek gaat bekijken moet je eerst de vensterinstellingen goed maken. Dat doe je (net als bij functies) via WINDOW. Het scherm dat je dan krijgt begint met de in te stellen waarden voor T en vervolgens kun je de juiste waarden voor X en Y gaan instellen. In de figuren zie je geschikte instellingen voor de gegeven kromme. Je ziet, dat de stapgrootte voor t is ingesteld op 0,1. Je kunt ook kleinere stappen maken, maar dan duurt het tekenen van de kromme langer. Maak je daarentegen hele grote stappen, dan worden er maar weinig punten van de kromme berekend, die dan worden verbonden op een zodanige manier dat je de kromme niet herkent!
Nu kun je via GRAPH de kromme tekenen. Er ontstaat een mooie "liggende acht". Mogelijk is de kromme niet helemaal gesloten. Kies dan voor t waarden van 0 tot bijvoorbeeld 10 (dus iets meer dan 2π).

Met TRACE kun je over de kromme lopen. Je gaat er dan met "tijd"stappen van 0,1 (die was immers ingesteld) overheen. De bijbehorende waarden voor t, x en y komen in beeld.

Experimenteer maar eens even met andere instellingen voor t.

Oefen het tekenen van krommen met de TI-84. Zoek voorbeelden van krommen in je wiskundeboek.

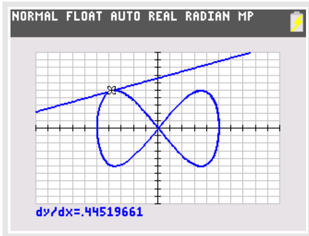
2 Hellingsgetallen bij parameterkrommen

Je hebt de kromme K: $(x,y) = (5 \cdot \sin(t), 5 \cdot \sin(2t))$ met t lopend van 0 tot en met 10 bekeken in het voorgaande deel. Zorg ervoor dat deze kromme weer in beeld komt.

Bij elk punt van deze kromme kun je je afvragen welke **helling** de raaklijn aan de kromme heeft.

Deze helling wordt voorgesteld door $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$.

Je vindt die helling via 2ND TRACE (het CALC-menu voor krommen) en dy/dx te kiezen.



Vervolgens loop je met de cursor naar het gewenste punt of je tikt de gewenste waarde voor t in, bijvoorbeeld $t = 4$.
Via 2ND PRGM (DRAW betekent tekenen) en 5: Tangent(kun je de raaklijn de kromme tekenen.

Ook kun je je afvragen met welke **snelheid** de kromme wordt doorlopen in een bepaald punt.
Daarvoor gebruik je de verandering van x en die van y in dat punt, dus $x'(t)$ en $y'(t)$.
Deze veranderingen heten op de rekenmachine dx/dt en dy/dt. Ook deze waarden vind je via het CALC-menu.
De snelheid waarmee het punt de kromme doorloopt voor $t = 0$ bereken je zo:

- Bepaal met CALC zowel dx/dt als dy/dt voor $t = 0$.
- Bereken in het rekenscherm de snelheid $v(0) = \sqrt{(x'(0))^2 + (y'(0))^2}$.

Je vindt bij de gegeven kromme: $v(0) \approx 11{,}18$ eenheden per tijdseenheid (afgerond op twee decimalen).

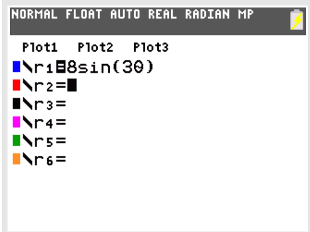
Bekijk ook de hellingsgetallen en bereken de doorloopsnelheid in andere punten van deze kromme. Waar gaat het doorlopen het snelst?

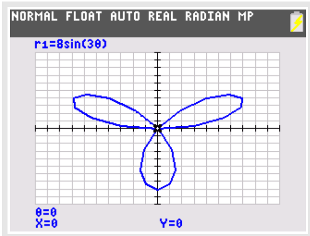
3 Krommen in poolcoördinaten

Een andere manier om een kromme te beschrijven is met zogenaamde **poolcoördinaten**. Daarbij werk je in een x, y-assenstelsel, maar geef je een punt P van een kromme weer door een functie van de vorm $r = f(\theta)$, waarin θ de hoek is die het lijnstuk OP met de positieve x-as maakt.

Een driebladige bloem krijg je met $r = 8\sin(3\theta)$.

Je voert die formule zo in:





- Stel de machine via MODE in op POLAR (Poolkromme). Zorg er voor dat hij ook op radialen staat ingesteld.
- Voer via Y= de gewenste formule in.
  Gebruik weer X,T,Θ,N voor de variabele. Je krijgt automatisch het teken θ.
- Stel het venster goed in. In dit geval zijn de standaardinstellingen wel goed.
- Met GRAPH krijg je de kromme te zien.

Ook nu kun je met TRACE over de kromme lopen, met ZOOM inzoomen en uitzoomen en met het CALC-menu hellingsgetallen laten berekenen in punten van de kromme.

Experimenteer met krommen in poolcoördinaten. Hoe maak je bijvoorbeeld een achtbladige bloem?

Regressie en de TI-84

De TI-84 kan bij bepaalde soorten verbanden bij een gegeven tabel een formule maken. Als je bijvoorbeeld denkt dat de grafiek bij een gegeven tabel bij benadering een rechte lijn is, dan past daar een lineair verband bij. Deze rekenmachine kan dan een formule voor dat lineaire verband opstellen.
Loop eerst het practicum **Basistechnieken TI-84** door.

Inhoud

1 Een trendlijn bepalen

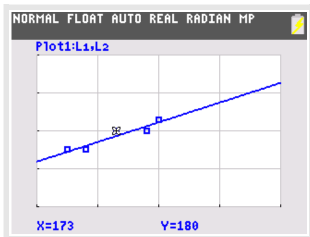
Stel je voor dat je de volgende statistische gegevens hebt:

Lengte vader (cm)	173	168	178	180	165
Lengte zoon (cm)	180	175	180	183	175

Je kunt bij deze waarden een **puntenwolk** maken. Soms liggen die punten ongeveer op een rechte lijn, de zogenaamde **trendlijn** of **regressielijn**. Je kunt dat als volgt nagaan:

- Druk op STAT, kies bij EDIT 1: Edit... en voer de gegevens in L1 en L2 in. (Misschien moet je eerst beide lijsten nog schoonmaken.)
- Ga vervolgens naar STAT, CALC en kies LinReg(ax+b).
- Je krijgt dan een nieuw venster.
  Vul voor Xlist L1 in, voor Ylist L2 en FreqList laat je leeg. Deze optie gebruik je alleen als je werkt met frequentietabellen.
  Je wilt dat het gevonden verband als formule wordt opgeslagen, zet daarom bij Store RegEQ Y1 neer. Y1 vind je met VARS en dan de tab Y-VARS en 1: Function... ENTER en kies Y1.
- Als je nu naar Calculate gaat en ENTER drukt, vind je de formule met de juiste waarden voor a en b onder elkaar.

Het resultaat is de vergelijking, in dit geval: $y \approx 88{,}8 + 0{,}52 \cdot x$.
Als je nu op $Y =$ drukt, zie je dat deze formule ook is ingevuld voor Y1.



Mooi is nog het in beeld brengen van zowel de punten uit de gegeven tabel als je grafiek:

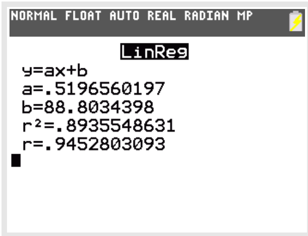
- Met 2ND Y= kom je in STAT PLOT. Je kiest daarin voor bijvoorbeeld Plot1 ENTER. Vervolgens zet je Plot1 aan, kies je het juiste type en zorg je er voor dat de Xlist je x-gegevens (hier: lengte vader in L1) aangeven en de Y-list je y-gegevens (hier: lengte zoon in L2) aangeven.
- Met behulp van GRAPH vind je nu zowel de grafiek bij de opgestelde formule als de punten van de gegeven tabel, tenminste als je de assen goed hebt ingesteld.

Probeer zelf het resultaat te krijgen dat je in de figuur ziet.

2 De correlatiecoëfficiënt berekenen

Gebruik weer de gegevens die eerder in dit practicum zijn ingevoerd.

Doe nu eerst het volgende:
Druk 2ND 0 (CATALOG) en kies DiagnosticOn en ENTER en nog eens ENTER.
Hiermee krijg je extra gegevens te zien bij sommige berekeningen.
Deze instelling blijft tot je een reset uitvoert.
Verder moet je deze instelling aanzetten als je de examenstand inschakelt. Let daarop!



Voer nu weer de bepaling van de trendlijn uit zoals eerder in dit practicum beschreven is.

In het scherm waar de waarden a en b van de regressielijn worden getoond, zie je nu extra gegevens, waaronder de correlatiecoëfficiënt r_{xy}.

Hier is: $r_{xy} \approx 0{,}945$.

Er is dus sprake van een hoge correlatie.

Opmerkingen:

- Je hebt vast wel gezien dat er ook andere verbanden tussen de variabelen kunnen worden onderzocht. Je kunt namelijk bij sommige gegevens ook een kwadratisch verband, of een derdegraads of vierdegraads verband, of een exponentieel verband, of een machtsverband of een logaritmisch verband proberen te vinden omdat de gegevens daar beter bij lijken te passen.
- Je kunt ook kiezen voor LinReg(a+bx). De rol van de a en de b is dan omgekeerd.

Rijen en de TI-84

Met de TI-84 kun je op diverse manieren rijen in beeld brengen. Verder kun je daarbij ook gemakkelijk somrijen en verschilrijen maken. Je kunt tijdgrafieken en webgrafieken tekenen.
Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI-84** door.

Inhoud

1 Rijen met directe formules

Rijen met directe formules kunnen op drie manieren worden ingevoerd.
Ga uit van de rij met directe formule:

$u_n = 800 \cdot 1{,}05^n$ met $n = 0{,}1{,}2{,}...$

Rij als functie

Je kunt de rij als een gewone functie opvatten met als domein alleen de getallen 0,1,2,3,4,...
Je krijgt dan zo de rij en de grafiek in beeld:

- Toets Y= en voer het functievoorschrift in: $y_1 = 800 \cdot 1.05^x$.
- Toets 2ND WINDOW (TABLESET) en stel de tabel zo in, dat hij start bij $x = 0$ en dat de stapgrootte 1 is.
- Via 2ND GRAPH (TABLE), vind je nu de termen van de rij.
- Via GRAPH vind je de grafiek van deze rij, helaas als doorgetrokken kromme, niet met losse punten.

Je kunt eenvoudig de bijbehorende **verschilrij** in beeld brengen via: $y_2 = y_1(x+1) - y_1(x)$.

Je vindt y_1 via VARS en Y-VARS en 1: Function... ENTER en kies Y1 ENTER.

Je kunt de bijbehorende **somrij** maken via Y= en $y_3 = \text{sum}(\text{seq}(y_1, x, 0, x))$.

Je vindt hierin:

- "sum" via 2ND STAT en bij MATH kiezen 5: sum(.
- "seq" via 2ND STAT en bij OPS kiezen 5: seq((seq van "sequence", Engels voor "rij"). In het venster dat verschijnt vul je achter Expr Y1 in. De variabele is X, start is 0, end is X en step is 1. Ga vervolgens naar Paste en ENTER. De formule staat nu achter y_3.

Bekijk de tabellen en de grafieken van deze rij, de verschilrij en de somrij.

Rij als lijst getallen

Je kunt de rij als een lijst met getallen opvatten. Je kunt hem dan invoeren in de lijsten L1, L2, enz. Dat gaat zo:

- Toets STAT en ga naar EDIT en ENTER. Je ziet nu de lijsten L1, L2, ...
- Maak indien nodig alle lijsten eerst leeg met 2ND + (MEM van "memory") en kies 4: ClrAllLists.
- Voer in L1 de nummers van de termen (hier: 0,1,2,3,4,...,20) in door de cursor op L1 te zetten en ENTER. Onderaan zie je nu L1= met daarachter de cursor.
  Ga naar 2ND STAT en kies bij OPS 5: seq(.
  Kies in het verschenen venster X voor de Expr en de Variable. Maak Start 0, End 20 en Step 1. Ga vervolgens naar Paste en druk tweemaal op ENTER.
- Voer in L2 de termen van de rij in door de cursor op L2 te zetten en ENTER. Onderaan zie je nu L2= met daarachter de cursor.
  Ga naar 2ND STAT en kies bij OPS 5: seq(.
  Kies in het verschenen venster 800*1.05^X voor de Expr en X voor de Variable. Maak Start 0, End 20 en Step 1. Ga vervolgens naar Paste en druk tweemaal op ENTER.
- Je hebt nu de rij als tabel in L2.

Opmerking:

Als je de rij eerst als functie y_1 hebt ingevoerd, kun je hem in L2 ook oproepen als Y1.

De bijbehorende **verschilrij** kan nu in L3 door: L3 = ΔList(L2) in te voeren onder L3.
Je vindt hierin:

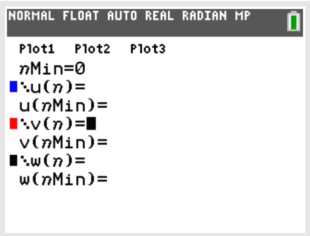
- "ΔList" via 2ND STAT en bij OPTS kiezen 7: ΔList(en ENTER.
- "L2" via 2ND 2 en ENTER.

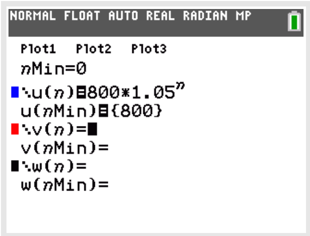
Je kunt de bijbehorende **somrij** maken in L4 door: L4 = cumSum(L2) in te voeren onder L4. Je vindt cumSum(door te toetsen 2ND STAT en bij OPTS kiezen 6: cumSum(.

Bekijk de tabellen en de grafieken van deze rij, de verschilrij en de somrij.

Rij in de seq-mode

Speciaal voor Rijen is er echter de seq-mode. Je toetst daartoe MODE en kiest SEQ (dat staat achteraan op de rij die begint met FUNCTION) en dan ENTER. Als je nu Y= toetst, dan zie je het venster linksonder.





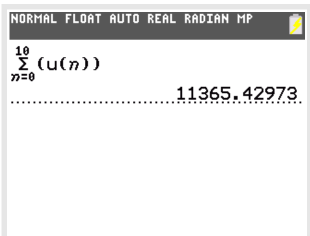
Achter u(n) voer je vervolgens het voorschrift van de rij in: $u(n) = 800 \cdot 1{,}05^n$.
De n vind je op dezelfde toets als de variabele x bij functies.
Achter u(nMin) voer je de term in die hoort bij de laagste waarde van n, dus 800 (de accolades verschijnen vanzelf). Je ziet dan het venster rechtsboven.

Je kunt nu op de reeds bekende manier gebruik maken van GRAPH, TABLE, TBLSET, WINDOW en TRACE. Loop die toetsen nog even na om te kijken wat er in de seq-mode mee gebeurt. Let wel op, dat je even via 2ND ZOOM (FORMAT) kijkt of bij daar wel "Time" is ingesteld, want anders krijg je een heel ander soort grafiek dan je gewend bent (daarover later meer).

Maak een grafiek van de rij waarbij n loopt van 1 t/m 20.
Oefen het werken met rijen gegeven door een directe formule.
Op deze manier kun je helaas geen bijbehorende **verschilrij** of een bijbehorende **somrij** maken.

Wel kun je de **som van een aantal termen** berekenen. Bijvoorbeeld de som van de eerste 11 termen van de rij:

- Ga naar het rekenscherm en toets MATH 0: summation Σ(
- Voer onder het somteken in n=0 en boven het somteken 10.
- Voer tussen de haken u(n) in via 2ND 7 (voor de u) en (X,T,Θ,N) (voor de n tussen haken).
- Na ENTER zie je de gewenste som, zie figuur.



2 Recursief gegeven rijen

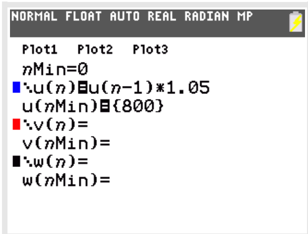
Als je een rij die gegeven is door een recursieformule wilt invoeren, moet je de TI-84 eerst laten werken in de seq-mode (sequence = rij). Je toetst daartoe MODE, kies SEQ en ENTER.

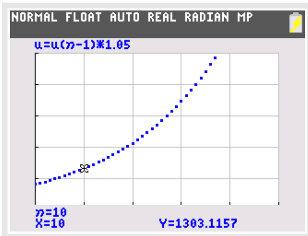
Bekijk nog eens de rij met directe formule:

$u_n = 800 \cdot 1{,}05^n$ met $n = 0{,}1{,}2{,}...$

De bijbehorende recursieformule is:

$u_{n+1} = 1{,}05 \cdot u_n$ met $u_0 = 800$





In de seq-mode is de rij ook als recursieformule in te voeren. Bij deze rekenmachine begint het rij-scherm begint met u(n)=, in plaats van u(n+1)=. Je moet daarom eerst het recursievoorschrift aanpassen tot:

$u_n = 1{,}05 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 800$

Bedenk dat dit mag, omdat beide manieren van schrijven betekenen: “Deze term ontstaat uit de vorige door ...”

Daarna kun je hem invoeren op dezelfde manier als beschreven in de rij invoeren in de Seq-mode. De u vind je als 2ND 7. Zie hiernaast.

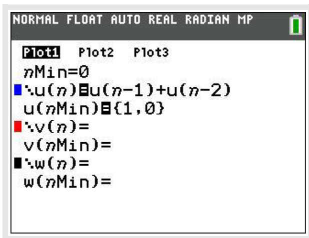
Je kunt nu op de reeds bekende manier gebruik maken van GRAPH, TABLE, TBLSET, WINDOW en TRACE. Loop die toetsen nog even na om te kijken wat er in de seq-mode mee gebeurt. Let wel op, dat je even via 2ND ZOOM (FORMAT) kijkt of bij daar wel "Time" is ingesteld, want anders krijg je een heel ander soort grafiek dan je gewend bent (daarover later meer).

Maak een grafiek van de rij waarbij n loopt van 1 t/m 20. Oefen het werken met rijen gegeven door een recursieformule.

Opmerkingen:

- Op deze manier kun je helaas geen bijbehorende **verschilrij** of een bijbehorende **somrij** maken.
- De **som van een aantal opeenvolgende termen** bepaal je op dezelfde wijze als bij rijen met directe formules.

De rij van Fibonacci



Hier zie je hoe de rij van Fibonacci kan worden ingevoerd.

Dit is een recursieve uitdrukking van de tweede orde. En daar moet je dus eerst voor kiezen, nadat je andere rijen hebt verwijderd.

Bekijk de bijbehorende grafiek en tabel.

3 Tijdgrafiek en webgrafiek

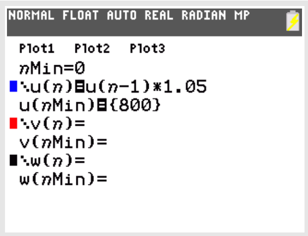
Je kunt bij rijen twee soorten grafieken maken:

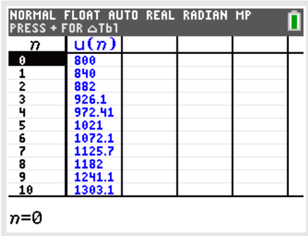
- "gewone" grafieken of tijdgrafieken zoals je die eerder zag;
- webgrafieken.

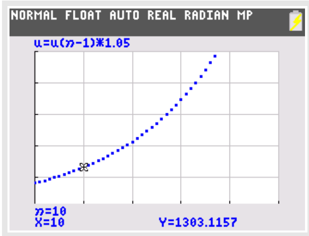
De bijbehorende instelling "Time" of "Web" vind je onder 2ND ZOOM (FORMAT) als de rekenmachine in de seq-mode staat.

Gebruik weer dezelfde rij als hiervoor met directe formule: $u_n = 800 \cdot 1{,}05^n$ en recursieformule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}05$ en $u_0 = 800$, waarbij $n = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}...$

De **tijdgrafiek** verschijnt netjes in beeld als "Time" is ingesteld, de formule is ingevoerd en de juiste scherminstellingen (n loopt van 0 t/m 50 en $u(n)$ loopt van 0 tot 5000) en tabelinstellingen zijn gekozen. Je ziet dan:

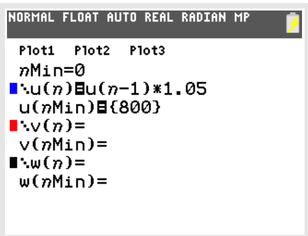


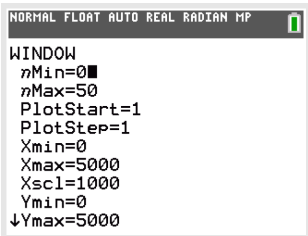


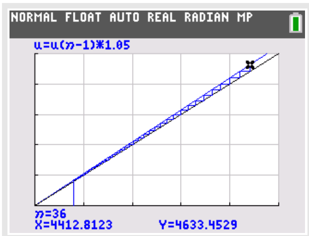


De **webgrafiek** verschijnt in stappen in beeld:

- Eerst kies je bij 2ND ZOOM (FORMAT) de instelling "Web".
- Vervolgens pas je het venster zo aan, dat zowel in de x-richting als in de y-richting rijtermen (lopend van 0 naar 5000 en eventueel nog groter) op het scherm passen.
- Met GRAPH zie je twee lijnen in beeld komen. Eén daarvan is de lijn $y = x$. De ander wordt bepaald door de rij (de bijbehorende theorie vind je in je wiskundemateriaal).
- Je toetst TRACE. Druk nu op de pijltjestoets omhoog zodat je formule voor u boven in je scherm verschijnt. Met de pijltjestoetsen vind je telkens twee opeenvolgende termen van de rij, te weten $x = u_{n-1}$ en $y = u_n$. In de grafiek zie je (hoewel dat in dit voorbeeld niet erg duidelijk is in het begin) de cursor springen van de lijn $y = x$ naar de lijn die door de rij wordt bepaald en weer terug, en zo maar steeds door.
- Je ziet de webgrafiek ontstaan.



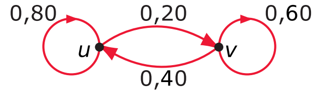




4 Stelsels rijen en fasegrafieken

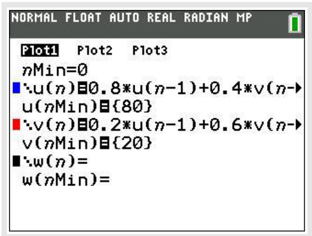
Er ontstaan stelsels rijen als je bijvoorbeeld te maken hebt met een migratiematrix, met de prooi-roofdier-cyclus, of bepaalde economische modellen. Een voorbeeld van zo'n stelsel is (de bijpassende migratiegraaf staat er naast):

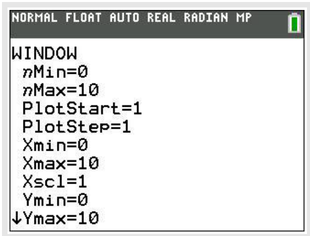
$$\begin{cases} u(n) = 0{,}8 \cdot u(n-1) + 0{,}4 \cdot v(n-1) \\ v(n) = 0{,}2 \cdot u(n-1) + 0{,}6 \cdot v(n-1) \end{cases}$$

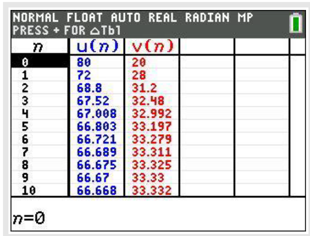


met $u(0) = 80$ en $v(0) = 20$.

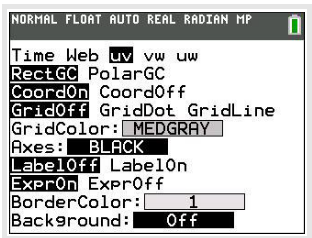
Na instellen van de seq-mode ziet kun je dit stelsel in via Y= invoeren, het venster instellen (denk er om dat in de y-richting de waarden van de rijen komen, dus je kunt beter eerst de tabel bekijken) en de bijpassende tijdgrafieken maken. Gebruik hierbij 2ND 8 voor v.

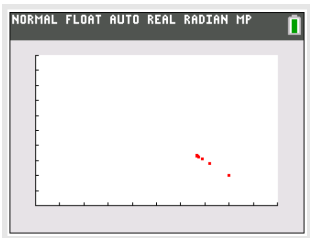






Juist bij stelsels rijen is het vaak nuttig om een zogenaamde **fasegrafiek** te maken, waarin de rij $u(n)$ op de horizontale as en de rij $v(n)$ op de verticale as is uitgezet. Je kiest dan via 2ND ZOOM voor FORMAT. Daarin kun je naast "Time" en "Web" ook kiezen voor "uv". Je krijgt dan zo'n fasegrafiek. Hier wordt hij niet erg spectaculair, want er ontstaat al snel een stabiele situatie; ga zelf maar na.





Veel leuker is het om dit te doen bij een geschikt prooi-roofdier-model...

Simulaties en tellen en de TI-84

De TI-84 kan je behulpzaam zijn bij het bepalen van kansen. Hij kan simulaties van kansexperimenten uitvoeren en je helpen bij het tellen van mogelijkheden.
Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI-84** door.

Inhoud

1 Simuleren

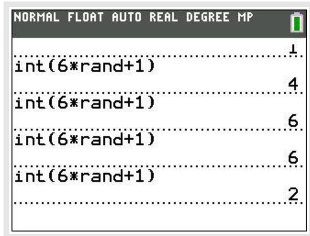
Het werpen met een dobbelsteen kun je simuleren met toevalsgetallen. Bij de TI-84 vind je de "randomizer" (toevalsgetallenmaker) door

- MATH te toetsen en dan naar de tab "PROB" te gaan met de pijltjestoetsen;
- vervolgens 1: rand te kiezen;
- en dan op ENTER te blijven drukken.

Je krijgt zo toevalsgetallen tussen 0 en 1 (in tien decimalen).

Als je toevalsgetallen tussen 0 en 2 wilt, dan vermenigvuldig je ze met 2.
In het rekenscherm zet je: 2 * rand.

Meestal heb je echter **gehele toevalsgetallen** nodig (bijvoorbeeld bij de dobbelsteen de getallen 1 t/m 6). Die kun je krijgen door "integer" (geheel getal) te gebruiken. De integer-routine laat gewoon alle decimalen weg, dus van 0,78456... maakt deze routine gewoon 0: int (0,78456) = 0. Maar int $(2 \cdot 0{,}78456)$ = int (1,56912) = 1.

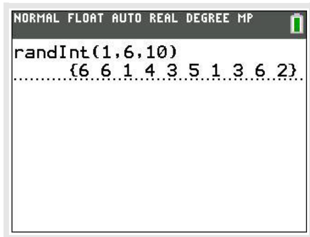


Bij de TI-84 vind je "integer" zo: MATH en NUM 5: int(.

Als je int(2*rand) in het scherm zet en je geeft steeds ENTER, dan krijg je de toevalsgetallen 0 en 1. Probeer maar...

Het werpen met de dobbelsteen kun je nu simuleren door int(6*rand + 1) in je rekenscherm te zetten en dan op ENTER te blijven drukken. In het plaatje hiernaast zie je dat gebeuren.

De TI-84 kent echter een routine om dit veel sneller te doen: randInt(). Voor de simulatie van 10 keer werpen met een dobbelsteen ga je dan zo te werk:



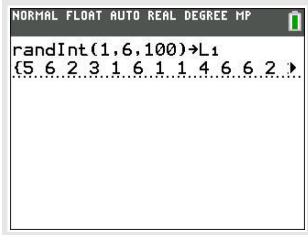
- Toets MATH en naar PROB 5: randInt(.
- Een nieuw venster opent zich nu. Voer bij lower de minimale waarde van de dobbelsteen in, 1 dus. Voer bij upper de maximale waarde in, 6 dus. Bij n voer je het aantal simulaties dat je wilt uitvoeren in, 10 dus. Ga vervolgens naar paste en ENTER.
- De uitdrukking randInt(1,6,10) verschijnt nu in je rekenscherm. Voer deze uit met ENTER.

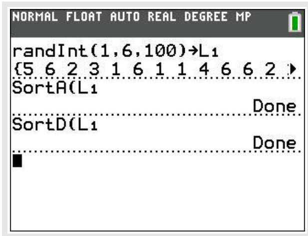
2 Werpen met dobbelstenen simuleren

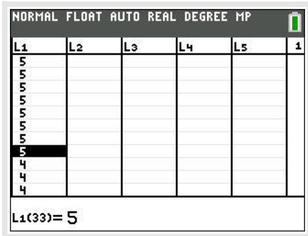
Om met behulp van simulaties kansen te bepalen, moet je gemakkelijk kunnen tellen hoe vaak elk getal in je simulatie voor komt. Je zet dan je toevalsgetallen in een lijst.

Werpen met één dobbelsteen

Stel je voor dat je 100 keer met een dobbelsteen gooien wilt simuleren en zo de kans wilt bepalen op het gooien van een 5. Je doet dan het volgende:







- Voer dezelfde simulatie uit als hiervoor, maar voer voor de n dit keer 100 in plaats van 10.
- Vertel de rekenmachine vervolgens dat dit in lijst L1 moet door er achter te tikken: STO→ 2ND 1 (lijst L1) ENTER
- Alle toevalsgetallen staan nu in L1 (lijst 1), je kunt dat zien door te tikken: STAT en 1: Edit... ENTER
- Vervolgens kun je de lijst sorteren:
  van klein naar groot: STAT en 2: SortA(2ND 1 (lijst L1) ENTER (even wachten op de melding: Done).
  SortA komt van Sort Ascending, sorteer oplopend.
  van groot naar klein doe je met 3: SortD((Sort Descending, sorteer aflopend).
- In de gesorteerde lijst kun je gemakkelijk tellen hoe vaak de vijf voorkomt van de 100 "worpen".

In de lijst hiernaast is de eerste 5 nummer 20 van de lijst en de laatste 5 is nummer 33. Er kwam dus 14 keer een vijf voor. De kans op 5 was daarom in deze simulatie 0,14.

Nog eenvoudiger is het om eerst een staafdiagram te maken bij lijst L1 via STATPLOT. Hoe je een staafdiagram bij een lijst maakt vind je in het practicum "Statistiek en de TI-84".

Voer zelf zo'n simulatie uit.

Werpen met twee dobbelstenen

Als je bij het werpen met twee dobbelstenen de kans wilt bepalen op een bepaald aantal ogen dat op beide stenen samen boven komt te liggen, hebben niet alle mogelijkheden een gelijke waarschijnlijkheid. Bij je simulatie moet je daarmee rekening houden: je simuleert elke dobbelsteen afzonderlijk en telt dan de uitkomsten bij elkaar. Een simulatie van 100 worpen met twee dobbelstenen gaat zo:

- Je voert randInt(1,6,100) + randInt(1,6,100) in en ENTER (dus 2 * randInt(1,6,100) is fout!).
- Vervolgens stop je het resultaat in L1.
- De simulatie van het werpen met twee dobbelstenen staat nu in L1. Deze lijst kun je sorteren en je kunt er een staafdiagram van maken. Met TRACE kun je nu gemakkelijk alle frequenties aflezen.

Voer zelf zo'n simulatie uit. Dit is natuurlijk gemakkelijk uit te breiden tot het werpen met drie dobbelstenen, of vier munten, etc. Zolang het maar niet over al te grote aantallen gaat...

3 Permutaties en combinaties

Het aantal **permutaties** van 6 elementen is het totale aantal mogelijke verwisselingen als alle 6 elementen verschillend van elkaar zijn.
Dat aantal permutaties is: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$.
De TI-84 kan 6! op de volgende manier berekenen zonder de hele vermenigvuldiging in te tikken:

- voer eerst een 6 in en toets MATH en naar 4: ! en ENTER.

Je ziet: $6! = 720$.

Bij het aantal **permutaties** van bijvoorbeeld 4 uit 10 gaat het om de mogelijke keuzes van 4 elementen waarvan de onderlinge volgorde ook belangrijk is uit 10 verschillende elementen, dus om $10 \times 9 \times 8 \times 7 = (10!)/(6!)$.
Je kunt dit met behulp van faculteiten berekenen.
Maar het kan ook zo:

- voer eerst 10 in en toets MATH en naar 2: nPr;
- toets een 4 en ENTER.

Je vindt: ${}_{10}P_4 = 5040$. Ga na dat dit hetzelfde is als $10 \times 9 \times 8 \times 7$.

Bij het aantal **combinaties** van 4 uit 10 gaat het om de mogelijke keuzes van 4 elementen waarvan de onderlinge volgorde niet belangrijk is uit 10 verschillende elementen, dus om $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$. Je schrijft het als $\binom{10}{4}$.

Je kunt dit met behulp van faculteiten berekenen.
Maar het kan ook zo:

- voer eerst 10 in en toets MATH en naar 2: nCr;
- toets een 4 en ENTER.

Je vindt: ${}_{10}C_4 = 210$. Ga na dat dit hetzelfde is als $\frac{10!}{4! \cdot 6!}$.

Even narekenen

Wanneer je het aantal mogelijkheden moet berekenen als je 10 elementen verdeelt in een groep van 2, een groep van 3 en een groep van 5, dan bereken je:

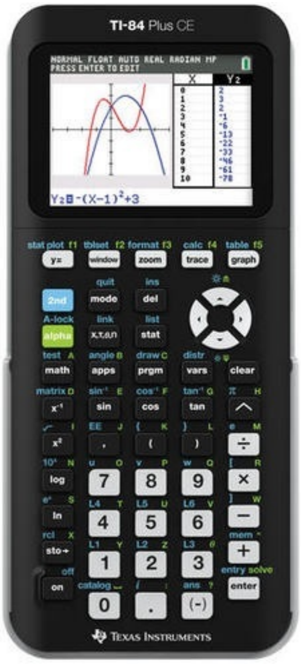
- $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$ of $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$.

Kijk maar eens of je uit allebei 2520 krijgt.

Statistiek en de TI-84

De TI-84 beschikt over een groot aantal statistische functies. Onder andere kan hij allerlei diagrammen maken en centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen. Loop eerst het practicum: **Basistechnieken TI-84** door.

Inhoud

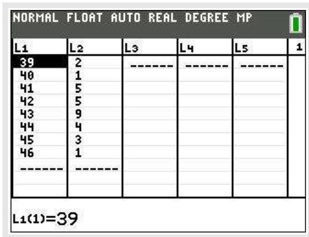


1 Statistische gegevens invoeren

Je ziet hier een tabel met daarin de schoenmaten van een groep van 30 mannen:

schoenmaat	frequentie
39	2
40	1
41	5
42	5
43	9
44	4
45	3
46	1

Deze tabel kun je in je grafische rekenmachine invoeren in het STAT-menu::

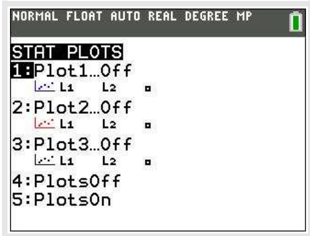


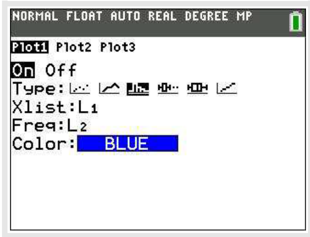
- Toets STAT en ga naar 1: Edit.
- Je krijgt dan een aantal lijsten naast elkaar te zien: L1, L2, ... , L6; met de pijltjestoetsen kun je door die lijsten lopen. Maak ze als dat nodig is eerst leeg in het MEM-menu: 2ND + en dan 4: ClrAllLists ENTER.
- Gebruik nu twee lijsten voor de tabel hierboven, bijvoorbeeld: L1 vul je met schoenmaten, L2 met de frequenties. Werk met de pijltjestoetsen!

Opmerking:

In plaats van ClrAllLists te gebruiken kun je ook via STAT 4: ClrList L1, L2 alleen de eerste twee lijsten leeg maken. L1 vind je via 2ND 1 en L2 vind je via 2ND 2.

2 Diagrammen

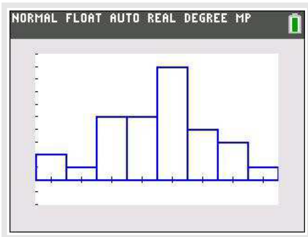




Nu je een frequentietabel hebt ingevoerd, kun je allerlei diagrammen maken met behulp van STAT PLOT.
Je bereikt dat met: [2ND] [Y=]. Je krijgt dan het eerste venster hiernaast.

Kies je voor 1: Plot1, dan kun je het eerste diagram instellen, je ziet dan het tweede venster hiernaast.

Kies voor On [ENTER] en loop met de pijltjestoetsen naar en door Type. Kies het type plaatje, controleer of Xlist op L1 en Freq op L2 staat ingesteld.
Indien dat niet het geval is, zorg daar dan voor. L1 en L2 vind je met [2ND] [1] en [2ND] [2]. Door [GRAPH] te toetsen zou het gekozen diagram in beeld moeten komen, afhankelijk van de scherminstellingen.



Om het histogram correct in beeld te krijgen moet je via [WINDOW] letten op de juiste instelling van Xmin (de linkergrens van de eerste staaf) en Xscl (de breedte van elke staaf). Denk er om dat ook bij gehele getallen (zoals hier bij de schoenmaten) de staven een bepaalde breedte krijgen; je moet in feite altijd uitgaan van een klassenindeling en de waarnemingsgetallen opvatten als de **klassemiddens**.
Bij de gegevens hierboven is het getal 39 dus eigenlijk de klasse 38,5– < 39,5. De linkergrens van de eerste staaf is daarom 38,5 en de breedte van elke staaf is 1. Dus je moet het venster zo instellen dat Xmin = 38,5, Xmax = 46,5 (of iets meer), Xscl = 1, Ymin = 0 (of iets minder), Ymax = 9 (of iets meer) en Yscl = 1.

Met [TRACE] loop je over de middens van de bovenkanten van een staafdiagram,of kun je minimum, maximum, mediaan, kwartielen aflezen in een boxplot.

Zelf diagrammen maken

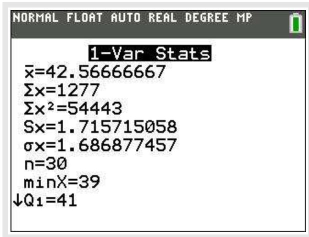
Breng achtereenvolgens met de gegevens hierboven in beeld: een staafdiagram, een lijndiagram, een boxplot. Zoek uit welk verschil er is tussen beide soorten boxplot in je rekenmachine. Werk ook eens met andere gegevens, kies met name ook eens gegevens die in klassen zijn ingedeeld.

3 Centrummaten en spreidingsmaten

Gebruik weer de gegevens uit de voorgaande tekst (de schoenmaten). Om de verschillende centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je zo te werk:

- Toets STAT, kies de tab CALC en dan 1: 1-Var Stats.
- Zet achter List L1 en achter FreqList L2.
- Ga op Calculate staan en ENTER.

Nu vind je:



- $\bar{x}$ = de gemiddelde schoenmaat is ongeveer 42,6;
- Σx = alle schoenmaten samen kwamen uit op 1277 (hier een zinloos getal);
- Σx^2 = de som van de kwadraten van de schoenmaten (hier een zinloos getal);
- Sx= de standaarddeviatie bij delen door 29 (niet gebruiken);
- σ x= de standaarddeviatie $\sigma \approx 1{,}69$;
- n= er waren in totaal 30 mannen;
- minX= de kleinste maat is 39 (pijltjestoets naar beneden);
- Q1= het eerste kwartiel is 41;
- Med= de mediaan is 43;
- Q3= het derde kwartiel is 44;
- maxX= de grootste maat is 46;

Doe dit ook eens met een tabel met gegevens die in klassen zijn ingedeeld.
Denk er om dat je dan de **klassemiddens** als waarnemingsgetallen gebruikt!

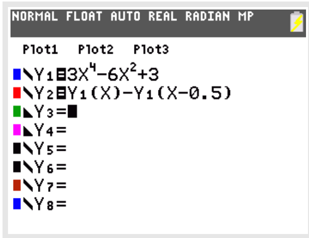
Veranderingen en de TI-84

De TI-84 kan je behulpzaam zijn bij berekeningen aan veranderingen en differentiëren.
Loop eerst van het practicum **Basistechnieken TI-84** het deel "Grafieken maken" door.
Loop daarna van het practicum **Functies en de TI-84** het deel "Functies combineren" door.

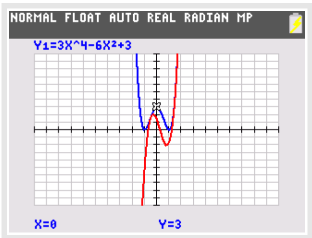
Inhoud

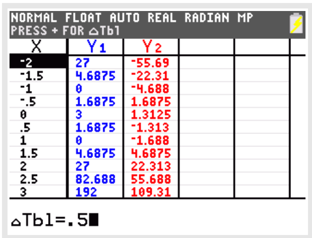
1 Tabel met toenamen van een functie maken

Je gaat een tabel met toenamen maken van de functie $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$ op het interval [-2,2] en met stapgrootte 0,5.
Het gaat als volgt:



- Druk op [Y=] en voer $y_1 = 3x^4 - 6x^2 + 3$ in.
- Bedenk dat je om de toename te berekenen, steeds een functiewaarde en zijn "vorige" functiewaarde van elkaar moet aftrekken. Voer daarom vervolgens $y_2 = y_1(x) - y_1(x - 0.5)$ in.
  Y1 vind je met de knop [VARS]. Ga met de pijltjestoetsen naar Y-VARS, kies 1: Function en vervolgens 1: Y1.
- Bekijk beide grafieken.
- Als je wilt, pas de vensterinstellingen aan.
- Via [2ND] [GRAPH] (TABLE) vind je de toenametabel. Zet de stapgrootte van deze tabel op 0.5. Doe dit door bij [2ND] [WINDOW] (TBLSET) de ΔTbl op 0.5 te zetten. Je kunt ook op [+] drukken als je de tabel in beeld hebt. Vervolgens kun je de gewenste stapgrootte invullen.





Bekijk de tabel, controleer de onderstaande waarden en neem de overige waarden over in een eigen tabel:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
Δy	geen*)				1,3				22,3

Hiermee kun je een toenamediagram tekenen.

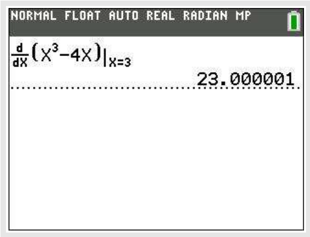
*) Voor de berekening van Δy bij $x = 2$, heb je $f(-2{,}5)$ nodig. Omdat het interval bij -2 begint, hoef je deze waarde niet in te berekenen. Je hoeft immers niet buiten het interval te rekenen.

2 dy/dx bij een waarde van x berekenen

De volgende omschrijvingen betekenen allemaal hetzelfde:

- De helling van de grafiek van $y = f(x)$ in een bepaald punt.
- Het hellingsgetal of de hellingwaarde van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x.
- Het differentiaalquotiënt van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x.
- De afgeleide voor van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x.
- Het hellingsgetal of de hellingwaarde van $y = f(x)$ voor een bepaalde waarde van x.
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ of $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ voor een bepaalde waarde van x.

Hier ga je de functie $f(x) = x^3 - 4x$ gebruiken en de afgeleide berekenen voor $x = 3$.

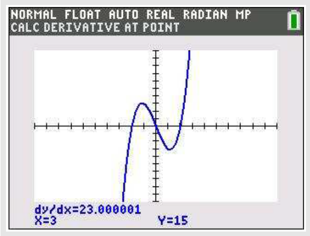


Met het rekenmachinescherm:

- Toets MATH en 8: nDeriv(.
- Vul de gegeven waarden in zoals in de figuur hiernaast.

Het differentiaalquotiënt van $f(x)$ is voor $x = 3$ dus gelijk aan 23.

Ook met het grafiekenscherm kun je de afgeleide in het punt berekenen:



- Voer de functie $y_1 = x^3 - 4x$ in en bekijk de grafiek.
- Stel de assen in zo dat $-4 \leq x \leq 4$ en $-10 \leq x \leq 20$.
- Toets 2ND TRACE (CALC) en kies voor 6: dy/dx.
- Toets nu direct het getal 3 in voor de waarde van x en druk op ENTER.
  Waarschuwing: Je kunt met de pijltjestoetsen een punt kiezen, maar dat is vaak niet nauwkeurig genoeg.
- Onderin het scherm vind je $x = 3$ en dy/dx = 23.

Het differentiaalquotiënt van $f(x)$ is voor $x = 3$ dus gelijk aan 23.

3 De afgeleide tekenen via differentiequotiënt

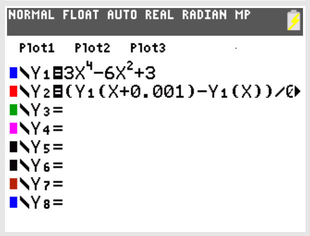
Je kunt ook direct je grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt benaderen door een differentiequotiënt op het interval $[x; x + 0{,}001]$ en daarvan een grafiek maken.

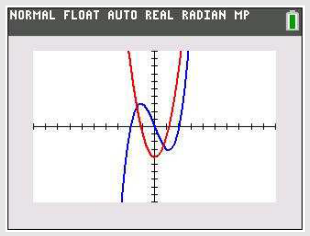
Gebruik de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Voer via Y= de functie f in als $y_1 = x^3 - 4x$.
- Voer een nieuwe functie $y_2 = \frac{y_1(x+0.001)-y_1(x)}{0.001}$ in.

  Y1 vind je met de knop VARS. Ga met de pijltjestoetsen naar Y-VARS, kies 1: Function en vervolgens 1: Y1.
- Bekijk beide grafieken.

De rode grafiek is die van de (benadering van de) afgeleide $f'(x)$.





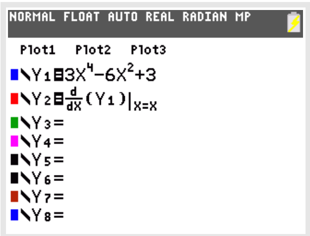
4 De afgeleide tekenen via differentiaalquotiënt

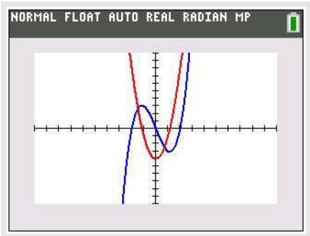
Je kunt ook direct je grafische rekenmachine een goede benadering van de hellingsgrafiek laten tekenen. Daartoe laat je hem voor willekeurige x het differentiaalquotiënt berekenen en daarvan een grafiek maken.

Gebruik de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

- Voer via Y= de functie f in als $y_1 = x^3 - 4x$.
- Voer bij y_2 de afgeleide functie in via de knop MATH, 8: nDeriv(en gebruik de knop VARS.
- Bekijk beide grafieken.

De rode grafiek is die van de afgeleide $f'(x)$.





Op de Math4All website en in Math4All readers wordt regelmatig verwezen naar de practica voor de grafische rekenmachine.Dat zijn 'losse' practica die kunnen worden doorgenomen als een specifiek onderwerp in de lessen aan de orde komt.
In dit katern zijn alle Math4All practica bij de TI-84 gebundeld.

www.math4all.nl