**Een aantal bewijzen van de stelling van Pythagoras**In alle situaties is een rechthoekige driehoek gegeven met rechthoekszijden *a* en *b* en schuine zijde *c*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 1**Het grote vierkant dat hiernaast is getekend heeft als oppervlakte $\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+b^{2}+2ab$ , maar de oppervlakte is ook gelijk aan $c^{2}+4∙\frac{1}{2}ab =c^{2}+2ab$ . Hieruit volgt dat $a^{2}+b^{2}+2ab=c^{2}+2ab$ , dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. | **Pythagoras (2).png** |

 **Bewijs 2**Beschouw de twee onderstaande vierkanten, elk met zijde $a+b$, die natuurlijk dezelfde oppervlakte hebben. Verwijder uit beide figuren de vier kopieën van de gegeven driehoek.
De resterende oppervlaktes zijn gelijk en dit geeft dat $a^{2}+b^{2}=c^{2}$.

|  |  |
| --- | --- |
| **Pythagoras (2).png** | **Pythagoras (2).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 3**We hebben hier aangenomen dat $a\geq b.$Het grote vierkant dat hiernaast is getekend heeft als oppervlakte $\left(a-b\right)^{2}+4∙\frac{1}{2}ab=a^{2}+b^{2}$, maar de oppervlakte is ook gelijk aan $c^{2}$.Hieruit volgt dat $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. | **Pythagoras (3).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 4**De oppervlakte van het getekende trapezium is enerzijds gelijk aan $\frac{1}{2}\left(a+b\right)\left(a+b\right)=ab+\frac{1}{2}\left(a^{2}+b^{2}\right)$ en anderzijds gelijk aan $2∙\frac{1}{2}ab+c^{2}=ab+\frac{1}{2}c^{2}$.Dit geeft: $ab+\frac{1}{2}\left(a^{2}+b^{2}\right)$ $=ab+ \frac{1}{2}c^{2}$, dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. | **Pythagoras (4).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 5**$∆BCD ∽∆BAC$ ⟹ $\frac{BD}{a}=\frac{a}{c}$ , dus $a^{2}=c∙BD$.$∆ACD ∽∆ABC$ ⟹ $\frac{AD}{b}=\frac{b}{c}$ , dus$b^{2}=c∙AD$. Er volgt dat $a^{2}+b^{2}=c∙BD+c∙AD$ $=c∙\left(BD+AD\right)=c∙c=c^{2}.$ | **Pythagoras (9).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 6**We plaatsen twee vierkanten met zijden *a* en *b* tegen elkaar. De figuur die hierdoor ontstaat verdelen we in drie stukken die we daarna samenvoegen tot een vierkant. | **Pythagoras (6).png** |
| **Pythagoras (7a).png** | **Pythagoras (7b).png** |
| Uit de eerste figuur blijkt dat de oppervlakte van de totale figuur gelijk is aan $a^{2}+b^{2}$ en uit de derde figuur blijkt dat de oppervlakte gelijk is aan $c^{2}$, dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. |

|  |
| --- |
| **Bewijs 7** |
| **Pythagoras (10a).png** | **Pythagoras (10b).png** |
| We nemen hier aan dat $a\geq b$.Het vierkant van $a$ bij $a$ in de linker figuur heeft duidelijk dezelfde oppervlakte als de rechter figuur. Hieruit volgt $a^{2}=\frac{1}{2}c^{2}+(a-b)(a+b)$ , dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$.  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 8**In de figuur hiernaast geldt:opp.$\left(∆PQR\right)=$opp.$\left(∆PQT\right)+$ $opp.\left(∆RST\right)+opp.\left(∆PSR\right)$Dit geeft (na vermenigvuldigen met 2):$c∙\left(c+US\right)=a^{2}+b^{2}+c∙US$, dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. | **Pythagoras (12).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 9**In de figuur hiernaast geldt dat $\frac{b}{x}=\frac{a}{b}$ , dus $x=$ $\frac{b^{2}}{a}$De zijde × hoogte$-$methode in ∆$ABC$ geeft: $AB×a=c×c$ , $\left(a+\frac{b^{2}}{a}\right)×a=c×c$ , dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ . | **Pythagoras (14).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 10**In de figuur hiernaast is vierhoek $AKCB$ congruent met vierhoek $AIFE$, want$AK=AI,AB=AE$, $BC=EF,$$∠KAB=∠IAE$ ,$ ∠ABC=∠AEF$.Evenzo is duidelijk dat vierhoek $AKCB$ congruent is met vierhoek $DCKE$ en dat vierhoek $AIFE$ congruent is met vierhoek $HIFG$.Dit alles impliceert dat zeshoek $AIHGFE$ dezelfde oppervlakte heeft als zeshoek $AKEDCB$ .Laten we uit beide zeshoeken twee kopieën van de gegeven rechthoekige driehoek weg, dan volgt dat $a^{2}+b^{2}=c^{2}$. | **Pythagoras (11).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 11**We zullen in de figuur hiernaast aantonen $opp.(BCDE)=opp.(BHKJ)$. **(1)**Evident is dat $∆BEA$ ≅ $∆BCH$ (ZHZ).We gebruiken nu tweemaal de eigenschap dat twee driehoeken met gelijke basis en gelijke hoogte dezelfde oppervlakte hebben. Dit geeft:$opp.\left(BCDE\right)=2∙opp.\left(∆BEC\right)$ $=2∙opp.\left(∆BEA\right)=2∙opp.\left(∆BCH\right)$ $=2∙opp.\left(∆BJH\right)=opp.(BHKJ)$.Analoog kunnen we aantonen dat$opp.(ACGF)=opp.(AIKJ)$. **(2)**Uit **(1)** en **(2)** volgt dat$opp.\left(BCFG\right)+opp.\left(ACED\right)$ $=opp.\left(BHKJ\right)+opp.\left(AIKJ\right)=opp.(BHIA)$, dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ . | **Pythagoras (13).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 12**We nemen hier aan dat $a\geq b$.De oppervlakte van het vierkant $PQRS$ dat hiernaast is getekend is enerzijds gelijk aan $a^{2}$ en anderzijds gelijk aan $opp.\left(UVRS\right)+opp.\left(∆UPV\right)+opp.(∆VQR)$ $=\frac{1}{2}c^{2}+\frac{1}{2}b\left(a-b\right)+\frac{1}{2}a(a-b)$ .Dit geeft: $a^{2}=\frac{1}{2}c^{2}+\frac{1}{2}b\left(a-b\right)+\frac{1}{2}a(a-b)$ , dus $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ . | Pythagoras (15).png |