**Oplossen derdegraads vergelijkingen**We veronderstellen in dit document dat de basiseigenschappen van complexe getallen bij de lezer bekend zijn. Verder beschouwen we hier slechts vergelijkingen met reële coëfficiënten.
Een algemene derdegraads vergelijking heeft de vorm
 , waarbij en en reële getallen zijn. (1)
Deze vergelijking willen we oplossen naar de complexe variabele .
Delen we in (1) beide leden door dan krijgen we een vergelijking van de vorm
 , waarbij en reële getallen zijn. (2)
We kunnen ons daarom beperken tot vergelijkingen van deze vorm.
Een diepe stelling uit de algebra (‘Hoofdstelling van de Algebra’) zegt dat een de graads vergelijking precies complexe wortels heeft.
Hierbij dient men een wortel even vaak te tellen als zijn **multipliciteit**.

**Voorbeeld 1**
Beschouw de zevendegraads vergelijking .
Dit is ook te schrijven als .
De wortels hiervan zijn (tweevoudig), (drievoudig) , en .

De vergelijking in (2) heeft dus drie complexe (mogelijk reële) wortels.
Alvorens we (2) gaan oplossen, gaan we eerst de aard van de oplossingen analyseren.
We introduceren de functie , waarbij een reële variabele is.
We kunnen dit herschrijven als , waarbij .
Als naar oneindig nadert, dan nadert naar nul. Er bestaat daarom zeker een positief getal zodanig dat , dus , als Dit impliceert dat het volgende:
 , als en
 , als [als , dan , dus het teken klapt om wanneer we beide leden van de ongelijkheid
 vermenigvuldigen met het negatieve getal ].
Er bestaat daarom een positief getal zodanig dat en een negatief getal zodanig dat . Omdat de grafiek van geen sprongen (‘discontinuïteiten’) vertoont, volgt er dat er een getal tussen en is waarvoor .
De vergelijking (2) heeft daarom minstens één reële wortel.
We vatten dit samen.

**Stelling 1**
Een derdegraads vergelijking met reële coëfficiënten heeft minstens één reële wortel.
Deze laatste stelling geldt niet alleen voor derdegraads vergelijkingen maar ook voor hogeregraads vergelijkingen van oneven graad. Het bewijs voor deze algemenere versie verloopt analoog.

Stel nu dat (2) een complexe oplossing bezit, waarbij en reële getallen zijn met
. Dan geldt dus dat .
We nemen nu van beide leden de complex geconjugeerde:
. Dit is te herschrijven als ,
 (gebruikt is dat en reële getallen zijn).
Uit deze laatste betrekking zien we dat ook een oplossing van (2) is.
Hiermee is een speciaal geval bewezen van de volgende algemene eigenschap.

**Stelling 2**
Als een complexe oplossing is van een hogeregraads vergelijking met reële coëfficiënten, dan is ook een oplossing van deze vergelijking.

Als we stelling 1 en stelling 2 combineren, dan komen we tot het volgende resultaat.

**Stelling 3**
Voor een derdegraads vergelijking met reële coëfficiënten zijn er twee gevallen mogelijk:
A) er zijn drie reële wortels (waaronder gelijke kunnen voorkomen) ;
B) er is één reële wortel en er zijn twee complexe wortels die elkaars geconjugeerde zijn.

Door een geschikte translatie toe te passen kunnen we in (2) de tweedegraads term **verdrijven**.
Stel daartoe , waarbij een nieuwe complexe variabele is en een nader te bepalen
reële constante. De substitutie in (2) leidt tot
 , dus (na het uitwerken van de haakjes)
. Hergroeperen geeft:
. (3)
We willen dat de term met wegvalt. Dit kunnen we bereiken door gelijk te stellen aan nul, dus door te nemen. We komen hiermee uit op een vergelijking van de vorm
, waarbij en reële getallen zijn. (4)

**Stelling 4**
Voor een vergelijking van de vorm is de som van de drie wortels gelijk aan nul.

**Bewijs**
Stel dat , en de drie wortels zijn van de vergelijking .
Dan geldt dat , dus
 .
In deze betrekking komt in het rechterlid geen term voor, dus moet die ook in het linkerlid ontbreken. Hieruit volgt dat .

We bepreken nu eerst enkele algemene eigenschapen van veeltermen.

**Stelling 5**
Als een veelterm is van graad en een getal, dan geldt: , voor een zekere veelterm van graad en een zekere constante .

Dit volgt direct uit de staartdeling waarbij we delen door .
De rest bij deze deling is een constante en het quotiënt is een veelterm van graad .
Hierbij geldt dat .
We zullen nog wat gedetailleerder aangeven hoe deze staartdeling hier in zijn werk gaat.
Neem aan dat .
De staartdeling verloopt als volgt:

|  |
| --- |
|  / \           ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ |

Hierbij wordt gesteld: , , , enzovoorts.
De graad van de veelterm waarop we moeten delen wordt per stap met minstens 1 verlaagd
(‘minstens 1’, omdat een of meer van de getallen , , gelijk aan nul kunnen zijn).
Het delingsproces eindigt wanneer we een rest krijgen waar geen meer in voorkomt, dus een rest die een constante is. Deze rest is het bovengenoemde getal en
 .

**Stelling 6 (factorstelling)**Als een veelterm is en een getal, dan geldt:
 voor een zekere veelterm

**Bewijs**
We schrijven in de vorm (zie stelling 5).
Invullen van geeft: , dus . Hieruit volgt direct
 voor een zekere veelterm
Een nulpunt van een veelterm heet een **meervoudig nulpunt** als
 voor een zekere veelterm . Nog verfijnder kunnen we definiëren:
een nulpunt van een veelterm heet een **voudig nulpunt** ( is een positief geheel getal) als voor een zekere veelterm met
 **Stelling 7**
Stel dat een veelterm is en een reëel getal. Dan geldt:
.

**Bewijs**
 I) Stel dat . Dan voor een zekere veelterm . Uiteraard geldt dat . Verder levert differentiëren
 . Hieruit volgt dat
.
II) Omgekeerd stel dat . Uit volgt vanwege stelling 6 dat
 voor een zekere veelterm Differentiëren geeft:
 . Door nu in te vullen krijgen we
, dus . Uit volgt, door nogmaals toepassen van stelling 6, dat voor een zekere veelterm .
We vinden dus dat en hieruit blijkt dat een meervoudig nulpunt van is.

We beschouwen nu de derdegraads veelterm en introduceren hierbij de uitdrukking . We noemen de **discriminant** van of ook wel de discriminant van de vergelijking . Dit is een soort analogon van de discriminant van de tweedegraads vergelijking .
Uit stelling 3 volgt direct dat een meervoudig nulpunt van een reëel getal is.

**Stelling 8**
 heeft een meervoudig nulpunt .

**Bewijs**
I) Stel dat een meervoudig nulpunt heeft. Volgens stelling 7 geldt dat , dus en . Dit geeft:
 en . Er volgt dat
.
II) Stel dat . We definiëren door: . Dan , dus . Vanwege leidt dit tot , dus , oftewel .
Voor en is voldaan aan en .
Volgens stelling 7 is een meervoudig nulpunt van .

Uit het bewijs van de vorige stelling kunnen we nog meer afleiden.

**Stelling 9**
Als en , dan zijn de wortels van de vergelijking :
 en .
**Bewijs**
Volgens stelling 8 heeft de vergelijking een meervoudige wortel, die we zullen noemen. In het bewijs van stelling 8 hebben we afgeleid dat en . Hieruit volgt dat
 , dus . Voor de derde wortel van de vergelijking geldt volgens stelling 4 dat , dus .

De veelterm kan ook een drievoudig nulpunt hebben.

Analoog aan stelling 7 blijkt dat er dan moet gelden:
 . Dit uitgewerkt geeft:
, dus .
Dit leidt tot het volgende resultaat.

**Stelling 10**
 heeft een slechts een drievoudig nulpunt als ; het drievoudige nulpunt is dan .

We onderzoeken nu nader de derdegraads functie , waarbij hier een reële
variabele is. Met name de extreme waarden zijn hierbij van belang.
. We onderscheiden nu vier gevallen
A) (dus ).
Dan en deze functie heeft het drievoudige nulpunt .
B) (dus ).
Dan en deze functie heeft precies één reëel nulpunt, namelijk
C) (dus ).
 voor alle . De functie is dan overal stijgend, dus heeft precies één reëel nulpunt; we wisten immers al dat minstens een reëel nulpunt heeft (stelling 1).
D) .
 heeft dan twee reële oplossingen, namelijk , waarbij ter afkorting gesteld is. Er geldt dat , dus .
 en
.
 en . (5)
Er geldt dat voor en ook voor ; voor .
Dit impliceert:
 is stijgend op het interval , dalend op het interval en weer stijgend op het interval . We weten ook al dat voor een zeker getal en voor een zeker getal (zie de analyse die leidde tot stelling 1). Er geldt daarom
 heeft drie verschillende reële nulpunten .
Nu geldt (zie (5) ) :

 . Dit alles, in combinatie met stelling 8, geeft het volgende resultaat.

**Stelling 11**
Voor en geldt:
 heeft precies een reëel nulpunt ;
 heeft drie reële nulpunten waaronder minstens twee gelijke ;
 heeft drie verschillende reële nulpunten .

We keren weer terug naar de vergelijking
, waarbij en reële getallen zijn en een complexe variabele is. (6)
We stellen , waarbij en twee nieuwe variabelen zijn.
Dit ingevuld in (5) geeft:
 , ,
 ,
. (7)
Vervolgens laten we en nu geen onafhankelijke variabelen zijn, maar twee variabelen
die aan elkaar gerelateerd zijn via de betrekking , oftewel . Dit geeft
 (8)
De betrekking in (7) reduceert dan tot:
. (9)

**Lemma (= hulpeigenschap)**
Als en twee getallen zijn zodanig dat en , dan zijn en de twee oplossingen van de kwadratische vergelijking .

**Bewijs**
Dit is triviaal, immers
.

Gelet op (8) en (9) leert het lemma ons dat en de oplossingen zijn van de vergelijking
. (10)
De discriminant van deze vergelijking is .
Dit is te herschrijven als , waarbij .
De oplossingen van de vergelijking (10) zijn .
We mogen aannemen en .
Hieruit vinden we voor elk van de twee vergelijkingen een oplossing:
 en .
We moeten hierbij de twee (eventueel complexe) derdemachtswortels zó kiezen dat .
Dit is inderdaad mogelijk, zoals we nu zullen beredeneren. Voer daartoe het complexe getal
 in. Merk op dat en dat een niet-reëel getal is.
Voor elke oplossing van en van geldt dat , dus en hieruit oplossen geeft .
De twee getallen en zijn beide niet- reëel. De betrekking is daarom gelijkwaardig met: is een reëel getal. We onderscheiden nu twee gevallen.
A) . Dan zijn en reële getallen.
Voor en kiezen we dan de (gebruikelijke) reële derdemachtswortels. Dan is zeker een reëel getal.
B) . Dan en ,
Beide getallen kunnen we in een polaire vorm schrijven:
 en , voor een zekere en een met .
We kiezen dan en . Er geldt in dit geval dat
 en dit is een reëel getal.
De oplossingen van zijn , en . (11)
De oplossingen van zijn , en . (12)
Omdat , kunnen we een oplossing van krijgen door een oplossing van
 op te tellen bij een oplossing van .
Omdat volgens (11) en (12) de vergelijkingen en elk drie oplossingen hebben, lijken er hiermee mogelijkheden voor te zijn.
Dit is echter niet het geval want er moet ook gelden dat .
Hierdoor blijven er slecht drie mogelijkheden voor over:
 , en .
Dit zijn juist de drie oplossingen van de vergelijking .
We merken op dat in elk van de gevallen A) en B) hierboven de uitdrukking een reëel getal is. Voor geval A) is dit evident omdat en zelf reële getallen zijn.
Voor geval B) volgt het uit: .
We vatten samen wat we hier afgeleid hebben.

**Stelling 12 (formule van Cardano)**
De drie oplossingen van de vergelijking zijn
 , en ,
waarbij , , en .
Hierbij zijn de twee derdemachtswortels zó gekozen dat een reëel getal is (zodat ) en ook een reëel getal is. Dit is als volgt te bereiken:
 ⟹ neem voor en de reële derdemachtswortels ;
 ⟹ en (0) ; neem
 en , zodat en .
Verder geldt dat en  **.**

**Opmerkingen**
**1)** Stel dat geldt: en zijn gehele getallen en is een geheel getal of een rationaal getal.
Dan kan men de twee andere oplossingen en van de vergelijking ook vinden door de veelterm te delen door en van het kwadratische quotiënt de nulpunten te bepalen. Dit verdient de voorkeur boven de formules en
 die meestal vrij omvangrijke en minder doorzichtige uitdrukkingen opleveren.
Een uitzondering hierop is de situatie waarbij en zelf tot eenvoudige uitdrukkingen te reduceren zijn.
**2)** In het geval kunnen we als en alle drie oplossingen van de vergelijking in een goniometrische vorm gieten:
 , en .
We kiezen daartoe de twee andere oplossingen van het stelsel vergelijkingen
 en (waarbij reëel is), te weten
 , en , .
**3)** Zie opmerking 2) hierboven. Indien een van de drie uitdrukkingen

een rationaal of geheel getal oplevert, dan kunnen we die opvatten als en daarna zoals aangegeven in opmerking 1) de twee andere oplossingen en bepalen.
**4)** In het geval is het getal in de betrekking gelijk aan
 , immers
. Dit impliceert dat , dus
, en .
**5)** Een nadeel van de formule van Cardano is dat soms een eenvoudige ‘mooie’ oplossing van een vergelijking (bijvoorbeeld een geheel getal) door de formule van Cardano weergegeven wordt door een ingewikkelde uitdrukking. Zie ook de voorbeelden hieronder.
**6)** Stelling 1 en stelling 11 kunnen ook afgeleid worden uit de formule van Cardano.

**Voorbeeld 1**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (13)
.
We weten reeds dat (13) drie reële oplossingen heeft waaronder minstens twee gelijke.
 en .
Dit geeft . De andere twee oplossingen van (13) zijn
 en
 (.
We kunnen en ook vinden door te delen door .
Dit geeft: .
Hieruit volgt direct dat .
Dit resultaat is in overeenstemming met stelling 9 :
 en .
**Voorbeeld 2**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (14)
.
Vergelijking (14) heeft daarom één reële oplossing en twee complexe (niet-reële) oplossingen die elkaars geconjugeerde zijn.
 en
.
Dit geeft: . De andere twee oplossingen van (14) zijn
en
(**.**
We kunnen en ook vinden door te delen door .
Dit geeft : .
 en zijn de oplossingen van de vergelijking , waarvan de discriminant gelijk is aan ; . Er volgt dat
 en .

**Voorbeeld 3**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (15)
.
Vergelijking (15) heeft daarom drie verschillende reële oplossingen.
 .
 . De drie oplossingen van (15) zijn daarom (zie opmerking 3) hierboven):
, en .
Hiervan is het eenvoudigste uit te rekenen:
.
Delen van door geeft: .
 en zijn de oplossingen van de vergelijking waarvan de discriminant gelijk is aan . Er volgt dat (omdat en ):
 en .
**Opmerking**
Men kan in voorbeeld 3 de uitdrukking ook rechtstreeks algebraïsch uitrekenen, zij het met wat meer werk. Daartoe gaan we uit van de bekende formule
. Dit geeft , dus
 . (16)
Dit is een **halveringsformule**. Als bekend is, dan kan m.b.v. (16) berekend worden. We kunnen (16) verfijnen tot
 en
.
Omdat volgt er dat
 .
Deze laatste uitdrukking kunnen we toevallig nog een stuk mooier schrijven:

 .
Er volgt dat .
Analoog kunnen we herleiden tot .

**Voorbeeld 4**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (17)
.
Vergelijking (17) heeft daarom drie verschillende reële oplossingen.
 .
Hier heeft  geen mooi argument (zoals in voorbeeld 3 wel het geval was).
De rekenmachine geeft en dit is inderdaad een oplossing van (17), zoals door invullen blijkt. Delen van door levert:
 .
 en zijn de oplossingen van de vergelijking , waarvan de discriminant gelijk is aan 12. We vinden hieruit dat en .

**Opmerkingen**
**1)** Als de rekenmachine (RM) geeft , dan dient men altijd door invullen in de gegeven vergelijking te controleren of deze ‘mooie’ oplossing voldoet.
Het kan namelijk gebeuren dat de RM niet correct uitrekent omdat voor de waarden van de twee derdemachten (waarbij er voor elk drie antwoorden zijn) mogelijk niet voldaan aan de eis dat hun product een reëel getal is.
We krijgen meer zekerheid als we overstappen op de polaire vorm:
, waarbij () ; maak zo nodig een schets in het complexe vlak). Er volgt dat
 .
De RM vindt hiervoor de waarde 4.
We kunnen zelfs algebraïsch verifiëren dat , dus dat .
Daartoe gebruiken we de formule: . (18)
Deze formule is als volgt af te leiden:

.
Passen we (18) toe met , dan vinden we (als we afkorten ) :
 . (19)
We voeren de volgende functie in: .
Dan is (19) te schrijven als .
Ook geldt dat , immers .

|  |  |
| --- | --- |
| Hieruit blijkt, zoals gewenst, te volgen dat , maar hiervoor is nog wel een verdere motivatie nodig.Voor de functie geldt: . .Met behulp van een tekenverloop van volgt direct dat:  heeft een maximum en een minimum .De grafiek van is hiernaast getekend. | derdegraads vergelijking (1).png |

 en zijn beide positief en .
Omdat de functie stijgend is rechts van het meest rechts gelegen nulpunt, volgt m.b.v. de grafiek van dat .
**2)** Algemeen als , waarbij en reële getallen zijn met , dan volgt, omdat en elkaars geconjugeerde zijn, dat voor een zeker reëel getal Dit betekent dat
 en dit impliceert dat
 . (20)
Uit () en volgt dat en beide positief zijn. Oplossen van uit (20) geeft daarom dat
 . (21)
We moeten hierbij nog wel nagaan dat . Dit volgt uit de volgende twee observaties:
\* , want
\* vanwege (20).
In voorbeeld 4 willen we algebraïsch verifiëren dat .
We passen het bovenstaande toe met en .
Neem (vanwege (21) ) .
Dan dus ook (neem de geconjugeerde) .
Er volgt dat

**Voorbeeld 5**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (22)
 .
Vergelijking (22) heeft daarom één reële oplossing en twee complexe (niet-reële) oplossingen die elkaars geconjugeerde zijn.
.
Als we dit met de RM uitrekenen, dan blijkt er 1 uit te komen. Deze waarde voldoet inderdaad aan (22), zoals door invullen direct blijkt. Delen van door levert:
 . en zijn de oplossingen van de vergelijking , waarvan de discriminant gelijk is aan . Er volgt dat
 en .

**Voorbeeld 6**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (23)
 .
Vergelijking (23) heeft daarom drie verschillende reële oplossingen.

 . De rekenmachine geeft hiervoor de waarde 10.
Deze waarde voldoet inderdaad aan (23). Delen van door geeft:
. en zijn de oplossingen van de vergelijking

, waarvan de discriminant gelijk is aan . Er volgt dat
 en .

**Opmerking**
We kunnen ook anders algebraïsch verifiëren dat .
Zie voorbeeld 4. We willen een reëel getalvinden zodanig dat .
Volgens (21) geldt er dan dat , dus
, en ook . Dit leidt tot
 .

**Voorbeeld 7**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (24)
We moeten eerst de tweedegraads term verdrijven.
Daartoe stellen we (zie pag. 2 voor de motivatie).
Dit invullen in (24) geeft:
 ,
 ,
 . (25)
 .
Vergelijking (25) heeft daarom één reële oplossing en twee complexe (niet-reële) oplossingen die elkaars geconjugeerde zijn.
,
waarbij ter afkorting gesteld is. De andere twee oplossingen van (24) zijn
 en
 De oplossingen van (24) zijn derhalve:
, en .

**Voorbeeld 8**
Los op m.b.v. de formule van Cardano: . (26)
We moeten eerst de tweedegraads term verdrijven. Stel :
 ,
 . (27)
 .
Vergelijking (27) heeft daarom één reële oplossing en twee complexe (niet-reële) oplossingen die elkaars geconjugeerde zijn.
.
Met de RM blijkt hier uit te komen en deze waarde voldoet inderdaad aan (27).
Delen van door geeft: .
 en zijn de oplossingen van de vergelijking , waarvan de discriminant gelijk is aan . Er volgt dat
 en .
De oplossingen van (26) zijn derhalve:
 , en **.

Opmerking**De oplossingen en kunnen ook op een andere manier bepaald worden.
Er blijkt te gelden dat en ;
de methode om hierop te komen is vrijwel identiek aan die welke behandeld is in opmerking 2) behorende bij voorbeeld 4.
Dit geeft: en **,** zodat
en
 **.**