**Limieten**Het limietbegrip speelt een fundamentele rol in de analyse (de studie van de functies).  
Het treedt onder andere op bij het differentiëren en het integreren.  
Laat gegeven zijn een functie die gedefinieerd is op een interval , behalve eventueel voor , waarbij . Laten we nu punten van kiezen die steeds dichter bij liggen. Wat valt er nu te zeggen over ? Nadert dan ook steeds dichter tot een bepaald getal?   
Als we tot een bepaald getal nadert indien tot nadert dan noteren we dit als  
 Een andere manier om dit uit te drukken is:  
 ( nadert tot ) als ( nadert tot ).  
We gaan nu een formele definitie van het limietbegrip afleiden. Wat betekent het als we zeggen dat als ? Het betekent dat steeds dichter bij ligt, dus dat tot 0 nadert als . Nog anders uitgedrukt: hoe klein je het positieve getal ook neemt, er zal gelden dat als voldoende dicht bij ligt. Hierbij betekent ‘ ligt voldoende dicht bij ’ dat er een zeker positief getal bestaat zodanig dat deze waarden van op een afstand van minder dan van liggen. Dit is ook te schrijven als .  
Hiermee komen we tot de formele definitie van het limietbegrip.  
  
 **betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan .**  
In het algemeen is het zo dat hoe kleiner we kiezen hoe kleiner we ook zullen moeten nemen. Als we met deze formele definitie voor een gegeven functie moeten aantonen dat  
 dan gaan we meestal als volgt te werk. Probeer de uitdrukking zodanig te herschrijven dat er geldt , waarbij een positieve functie is die begrensd is ‘in de buurt van ’, d.w.z. dat er positieve getallen en bestaan zodanig dat , voor alle met . Kies nu een willekeurig (klein) positief getal . Neem dan een positief getal zodanig dat en .  
Dan geldt voor alle waarvoor dat   
 , dus .  
Dit alles komt bij een eerste kennismaking met deze materie nogal abstract over, maar zal duidelijker worden bij het bestuderen van de volgende voorbeelden.

|  |  |
| --- | --- |
| **A)**  met en . We zullen aantonen dat . Er geldt:   .  Kies een willekeurig positief getal .  Neem .  Voor alle met geldt:  , dus  . | **limieten (2).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **B)** met en .  We zullen aantonen dat . Er geldt:    .  Voor alle in geldt dat . Kies een willekeurig positief getal .  Neem . Voor alle met geldt:  , dus  . | **limieten (1).png** |

**Opmerking**Bij de bovenstaande twee voorbeelden was het zo dat .  
Als dit het geval is dan heet de functie **continu in** . Meetkundig betekent dit dat de grafiek van bij geen sprong vertoont. Een functie heet **continu** als zij continu is in elk punt van haar domein.   
  
Een functie die discontinu is in of niet gedefinieerd is voor kan toch een limiet hebben voor , zoals de volgende twee voorbeelden laten zien.

|  |  |
| --- | --- |
| **C)**  met en . We merken op dat niet bestaat voor (omdat je dan 0/0 krijgt). Vandaar ook de perforatie in de grafiek van bij . We kunnen echter herschrijven als   voor . Deze laatste breuk nadert tot 2 als . De motivatie kan als volgt geschieden. Voor geldt: | limieten (3).png |

.   
Stel nu dat en . Dan geldt dat . Kies een willekeurig positief getal en neem voor een positief getal zodanig dat en .  
Voor alle met geldt: , dus .

|  |  |
| --- | --- |
| **D)** met en . Hierbij betekent naar beneden afronden op het dichtstbijzijnde gehele getal.  Merk op dat voor en voor , dus en bijgevolg  voor deze waarden van . Voor geldt dat , dus . Dit verklaart de grafiek van . We zullen aantonen dat . Voor alle in met geldt:  . | limieten (4).png |

Kies een willekeurig positief getal . Neem . Voor alle met geldt:  
 .  
  
Er bestaan vele varianten van de limietdefinitie. Een van de varianten is dat je niet vanaf twee mogelijke richtingen (links en rechts) tot laat naderen maar bijvoorbeeld slechts vanaf de rechterkant (= bovenkant). We noteren dit als . Dit leidt tot de volgende definitie:  
  
 **betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan .**Analoog kunnen we vanaf de linkerkant (= onderkant) tot laten naderen, notatie .  
Dit geeft de volgende definitie:  
  
 **betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan .**Het kan ook zijn datoneindig groot wordt als tot nadert. Het symbool voor oneindig is ∞. De betekenis hiervan is als volgt. Hoe groot we het positieve getal ook kiezen, er zal gelden dat als voldoende dicht bij ligt. Nog formeler uitgedrukt.  
  
 **∞ betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan .**Hiervan zijn natuurlijk ook weer rechtzijdige en linkszijdige varianten mogelijk, namelijk  
 ∞ en ∞ .Evident is hoe de formele definities hiervan luiden.  
Verder kan tot min oneindig naderen als tot nadert. De definitie is  
  
**∞ betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan .**  
  
Tot nu toe was een eindig getal, maar we kunnen voor ook ∞ of nemen.  
 **betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan**  **.**Analoog hebben we:  
  
 **betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle waarden van die voldoen aan**  **.**Natuurlijk kunnen ook zowel als gelijk zijn aan ∞ of en het is evident hoe de definities dan worden.  
  
Ook voor rijen kunnen we limieten definiëren. Gegeven is de rij getallen die we ook wel kort als noteren. Hierbij doorloopt de index alle positieve gehele getallen.   
  
 **betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief geheel getal zodanig dat  
 voor alle waarden van die voldoen aan .**Een rij kan ook tot ∞ of naderen. De definities hiervan luiden als volgt:  
  
 **∞ betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief geheel getal zodanig dat  
 voor alle waarden van die voldoen aan .** **∞ betekent:   
voor elk positief getal bestaat er een positief geheel getal zodanig dat  
 voor alle waarden van die voldoen aan .**We voeren enkele begrippen in. Laat een functie gedefinieerd zijn op  
een interval . We zeggen dat **stijgend** is op *I* als voor alle en uit *I* geldt:  
als dan . Analoog zeggen we dat **dalend** is op *I* als voor alle en uit *I* geldt: als dan . De functie heet **naar boven begrensd** op *I* indien er een getal bestaat zodanig dat voor alle in .  
De functie heet **naar beneden begrensd** op *I* indien er een bestaat zodanig dat voor alle in . We kunnen dan eigenschappen formuleren die het bestaan van een limiet garanderen.   
De eerste variant hiervan luidt als volgt:  
  
**indien de functie stijgend en naar boven begrensd is op het interval , dan bestaat .**  
Deze eigenschap is een gevolg van een van de axioma’s van de reële getallen. Op deze axioma’s zullen we hier niet verder ingaan. Intuïtief is de juistheid wel evident. Evenzo hebben we:  
**indien de functie dalend en naar beneden begrensd is op het interval , dan bestaat .**Van deze twee laatste twee eigenschappen bestaat ook rijenversies.   
  
**indien de rij**  **stijgend en naar boven begrensd is dan bestaat ;  
indien de rij**  **dalend en naar beneden begrensd is dan bestaat .**We bekijken weer wat voorbeelden.

|  |  |
| --- | --- |
| **E)** met en . We willen aantonen dat . Merk eerst op dat  . Voor geldt:  en , dus   , zodat . Kies een willekeurig positief getal . | limieten (5).png |

Neem voor een positief getal zodanig dat en . Voor geldt:   
, dus .

|  |  |
| --- | --- |
| **F)** met  We willen aantonen dat . Voor alle geldt   , dus .  Neem een willekeurig positief getal . Om te bereiken dat is het voldoende om aan te tonen dat . Dit laatste is het geval als . Dus als we en nemen dan geldt dat voor alle . | limieten (5).png |

|  |  |
| --- | --- |
| **G)** met . We willen aantonen dat . Kies een willekeurig positief getal . We willen bereiken dat , dus . Dit is te herleiden tot  , oftewel . | limieten (6).png |

Als we nemen, dan geldt voor alle .   
  
We zullen nu enkele standaardlimieten afleiden.   
  
**Stelling 1**  
Voor geldt dat .   
**Bewijs**  
Noem ). De rij is naar beneden begrensd, want voor alle ,  
en ook dalend want voor alle .  
Derhalve is rij convergent. Noem de limiet . Laten we in de betrekking   
 naar oneindig naderen, dan volgt er dat , dus .  
Vanwege volgt er dat .  
  
 **Stelling 2**Voor geldt dat .  
**Bewijs**  
Noem ). De rij is stijgend want   
 voor alle . Veronderstel dat de rij naar boven begrensd is. Dan is deze rij convergent. Noem de limiet . Merk op dat , want en de rij is stijgend. Laten we in de betrekking naar oneindig naderen, dan volgt er dat , dus . Dit is echter onmogelijk want en . De veronderstelling dat de rij naar boven begrensd is leidt tot een tegenspraak, dus de rij is naar boven onbegrensd. Kies een willekeurig positief getal .  
Er bestaat dan een natuurlijk getal zodanig dat (want de rij is onbegrensd naar boven). Voor elke volgt er dat (omdat de rij stijgend is) dat .  
Hiermee is aangetoond dat .  
  
**Stelling 3**.  
  
**Bewijs**  
Stel **.** Defunctie is stijgend want voor .   
Kies een willekeurig positief getal . Neem . Voor alle geldt ( is stijgend) , waarmee de stelling bewezen is. **Stelling 4**Voor geldt dat   
**Bewijs**  
Stel . Vanwege , voor alle , is de functie stijgend.  
Kies een willekeurig positief getal . Neem . Voor alle geldt ( is stijgend)  
, waarmee de stelling bewezen is.   
 **Stelling 5**Voor en willekeurig geldt dat .   
**Bewijs**  
Stel . Differentiëren geeft:   
 als .  
De functie is daarom dalend op het interval en ook naar beneden begrensd door 0 op dit interval. Dit impliceert dat bestaat. Noem deze limiet . Omdat voor alle volgt er dat . Veronderstel dat . Noem .   
Als naar oneindig nadert, dan nadert naar . Er geldt echter ook dat   
 als .   
Uit deze tegenspraak volgt dat er moet gelden: .  
  
**Opmerking**  
In het bovenstaande bewijs is impliciet de volgende eigenschap gebruikt:  
als en dan .   
Deze eigenschap is m.b.v. de limietdefinitie vrij eenvoudig te bewijzen.  
  
**Stelling 6**  
Voor en willekeurig geldt dat .

**Bewijs**  
De uitdrukking gaat door de substitutie over in , waarbij . We merken op dat . Toepassen van stelling 5 geeft:  
 .  
  
**Stelling 7**  
Voor geldt dat .  
**Bewijs**  
De uitdrukking gaat door de substitutie over in .   
We merken op dat . Toepassen van stelling 6 geeft:  
 .  
  
**Stelling 8**  
 .   
 **Bewijs**  
Stel . We merken op dat en .  
Toepassen van de definitie van de afgeleide geeft:  
 .   
  
**Stelling 9**  
Voor elk reëel getal geldt: .   
**Bewijs**  
Stel . Dit is te herschrijven als , waarbij .  
Deze laatste uitdrukking gaat door de substitutie over in .   
We merken op dat . Gelet op de vorige stelling volgt er  
 , dus .  
  
**Opmerking**  
In het bovenstaande bewijs is impliciet de volgende eigenschap gebruikt:  
als een continue functie is gedefinieerd in een interval waarin een inwendig (geen randpunt) gelegen is en op een interval gedefinieerd zodanig dat **,**dan volgt dat .  
Deze eigenschap is m.b.v. de limietdefinitie eenvoudig te bewijzen.  
  
**Stelling 10**  
Laat gegeven zijn de functies en zodanig dat ,en, dan volgt er dat   
**Bewijs**  
Omdat bestaat er een getal zodanig dat voor alle geldt dat .   
Stel (. Dit is te herschrijven als , waarbij  
.Vanwege (stelling 8) en (gegeven), volgt er dat   
, dus Als voorbeeld van de vorige stelling hebben we: .   
  
**Stelling 11**  
 .   
**Bewijs**  
In deze stelling dient men te lezen als .

|  |  |
| --- | --- |
| Hiernaast is de eenheidscirkel getekend in een rechthoekig assenstelsel. Verder zijn aangegeven het punt , het punt op de cirkel zodanig dat rad, waarbij . De raaklijn aan de cirkel in punt snijdt lijn in punt .  We merken op dat en  . Er geldt: opp. ; opp.(segment ) ;  opp.. | limieten (7).png |

Evident is dat opp. opp.(segment ) opp. , dus  
. (\*). Voor geldt dat .   
Delen we in (\*) alles door , dan vinden we . (\*\*). Laten we nu van de bovenkant tot 0 naderen, dan nadert tot tot , dus volgt uit (\*\*) dat ook en daarom ook nadert tot 1. Hiermee is aangetoond dat . Verder geldt:  
 ,   
waarmee de stelling bewezen is.   
  
**Opmerking**  
In het bovenstaande bewijs zijn de volgende drie eigenschappen impliciet aangenomen:  
a) de cosinusfunctie is continu in , dus ;  
b) als en en ook , dan volgt dat  
 . Dit heet de **insluitstelling**.  
c) als , dan .   
  
**Stelling 12**  
 .   
**Bewijs**  
Met behulp van de vorige stelling volgt:  
 .