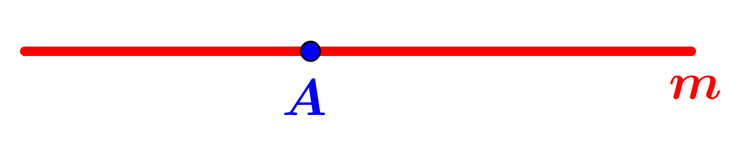
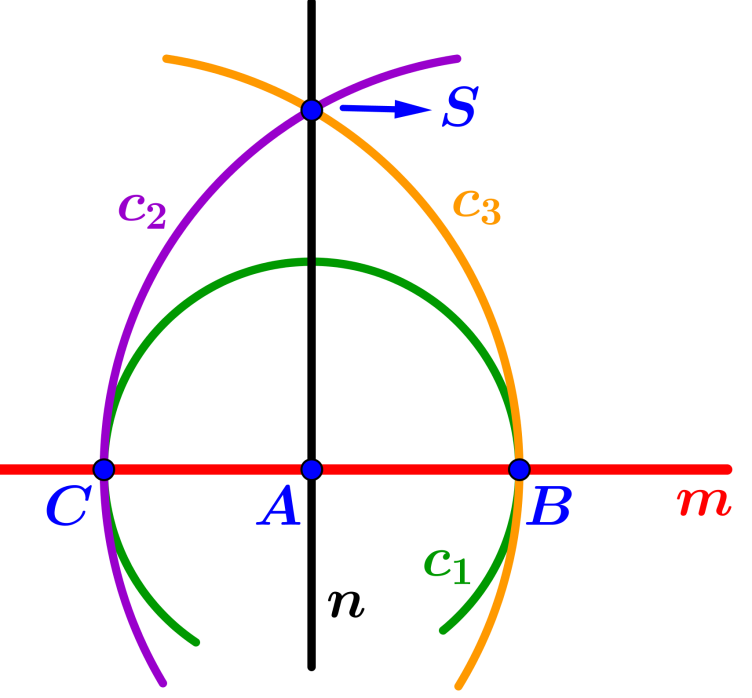
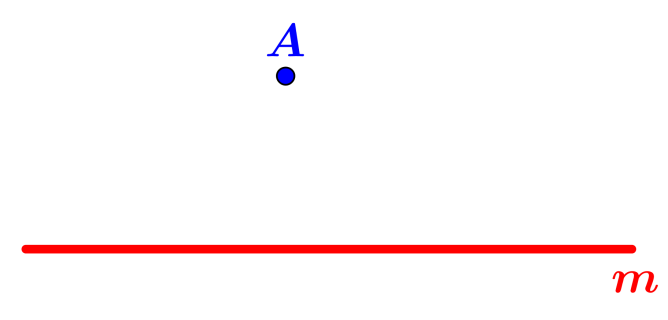
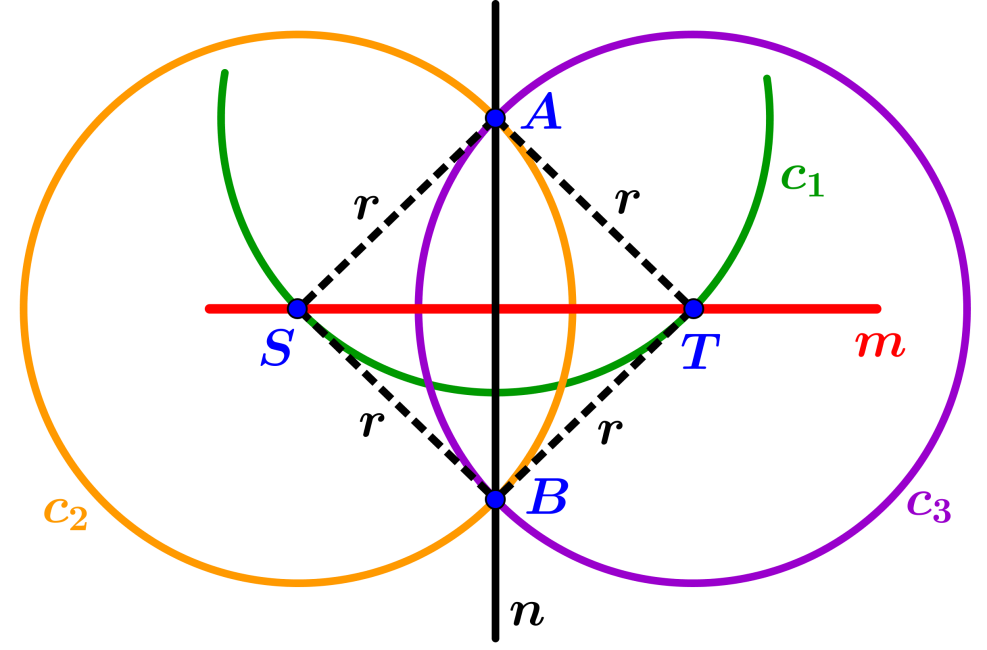
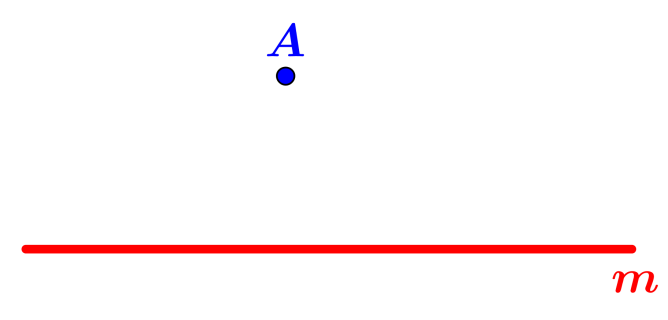
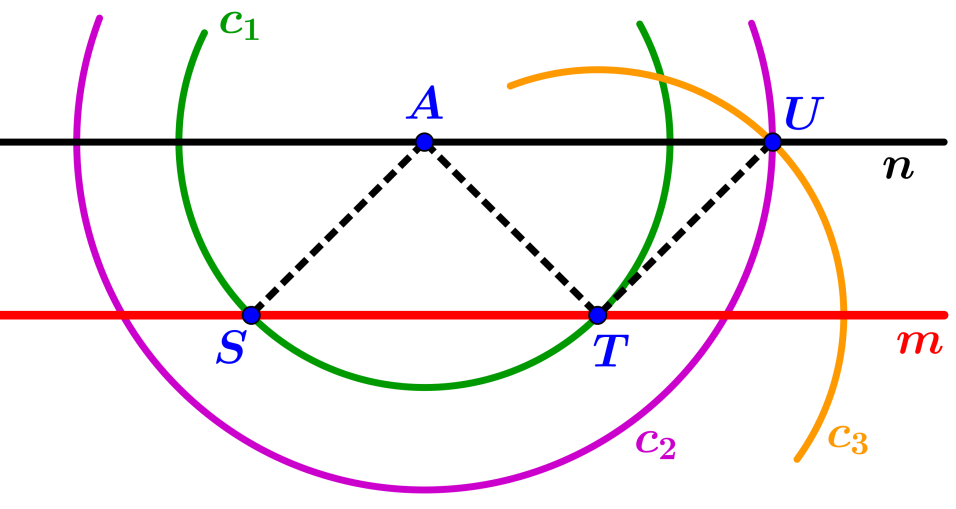
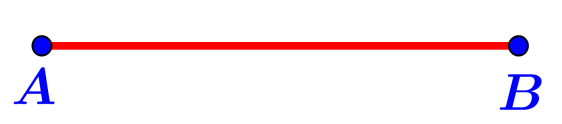
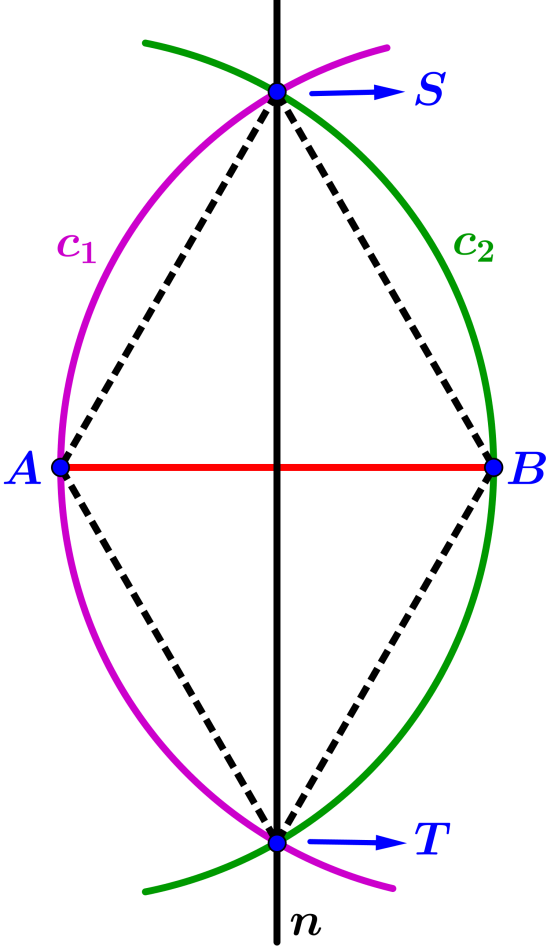
**Meetkundige constructies**Met een **meetkundige constructie** van een bepaald meetkundig object (punt, lijn of cirkel) bedoelen we een stappenprocedé om met behulp van passer en liniaal dat object te construeren. Het uitvoeren van meetkundige constructies was bij de oude Griekse wiskundigen een populaire bezigheid.  
  
De enige drie toegestane operaties bij elke stap zijn:  
1) met behulp van de liniaal een lijnstuk trekken dat door twee gegeven punten gaat;   
2) met behulp van de passer een cirkel trekken met een gegeven punt als  
 middelpunt en met een willekeurige straal;  
3) een punt kiezen op een lijn, lijnstuk, halve lijn of cirkel dat niet samenvalt met andere gegeven  
 punten op dit object.  
  
Voorbeelden van operaties die **niet** zijn toegestaan:  
\* de liniaal gebruiken om lengtes te meten en deze te gebruiken bij de constructie   
\* de lijntjes van de geodriehoek gebruiken om een lijn evenwijdig aan een andere lijn te tekenen  
\* de lijntjes van de geodriehoek gebruiken om een rechte hoek te tekenen  
\* hoeken meten en deze te gebruiken in de constructie  
\* vanuit een punt buiten een cirkel rechtstreeks een raaklijn trekken aan die cirkel.  
  
Bij een meetkundige constructie dient elke stap die men uitvoert ondubbelzinnig beschreven te worden. Nadat de constructie is uitgevoerd dient formeel aangetoond te worden dat de uitgevoerde constructie inderdaad het gewenste object oplevert.  
Bij meer ingewikkelde of omvangrijke constructies zullen we elementaire deelconstructies vaak als één stap weergeven, als die deelconstructies al eerder in dit dictaat uitvoerig zijn behandeld. Dit doen we om een te uitvoerig stappenproces te vermijden en de hoofdstappen duidelijker naar voren te laten komen.  
Voor het vervolg zullen we nog een enkele notaties invoeren:  
\* als en gegeven punten zijn, dan bedoelen we met het lijnstuk .  
\* als en gegeven punten zijn, dan bedoelen we met de lengte van lijnstuk .  
\* als een punt is en een lijn, dan bedoelen we met de (loodrechte)  
 afstand van tot .  
\* als en gegeven punten zijn, dan bedoelen we met de lijn door en die we dan   
 noemen.  
\* als en gegeven punten zijn, dan bedoelen we met de halflijn door   
 en met eindpunt die we dan noemen.  
\* als een gegeven punt is en een positief getal dan bedoelen we met de cirkel met  
 middelpunt en straal die we dan *c* noemen.  
  
  
Bij constructies waarbij niet direct duidelijk is hoe men moet beginnen kan de volgende aanpak handig zijn.   
Neem aan dat het gewenste object reeds geconstrueerd is. Maak hiervoor een schets. Probeer eigenschappen af te leiden die het geconstrueerde object heeft in relatie tot de gegeven elementen en tracht hiermee terug te redeneren hoe de constructiestappen moeten worden uitgevoerd.   
Dit onderzoek voorafgaande aan de daadwerkelijke constructie wordt wel de **analyse** genoemd.  
Als men bijvoorbeeld een cirkel moet construeren die aan bepaalde eisen voldoet, dan kan blijken dat voor het middelpunt van die cirkel moet gelden  
a) heeft gelijke afstanden tot twee gegeven punten en .  
 Je weet dan dat ligt op de middelloodlijn van lijnstuk .  
b ) heeft gelijke afstanden tot twee lijnen en die gaan door gegeven punten.  
 Je weet dan dat ligt op een van de deellijnen van en .

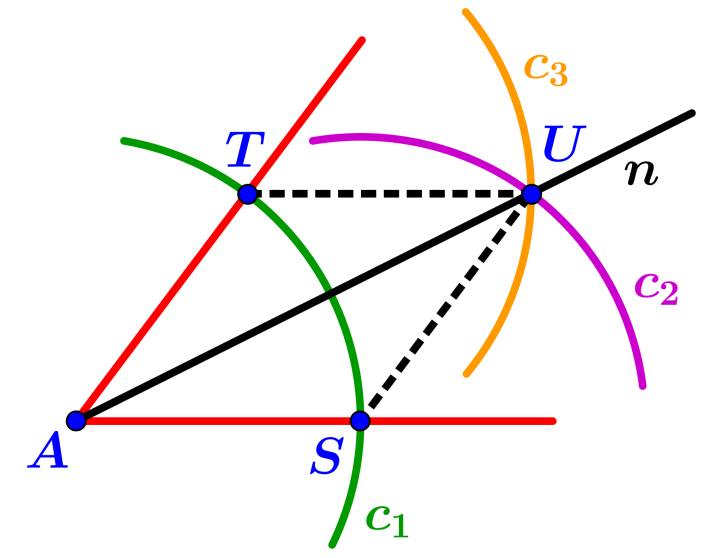
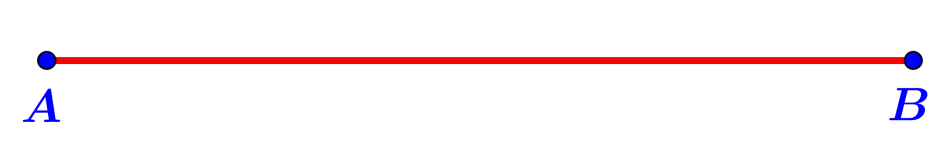
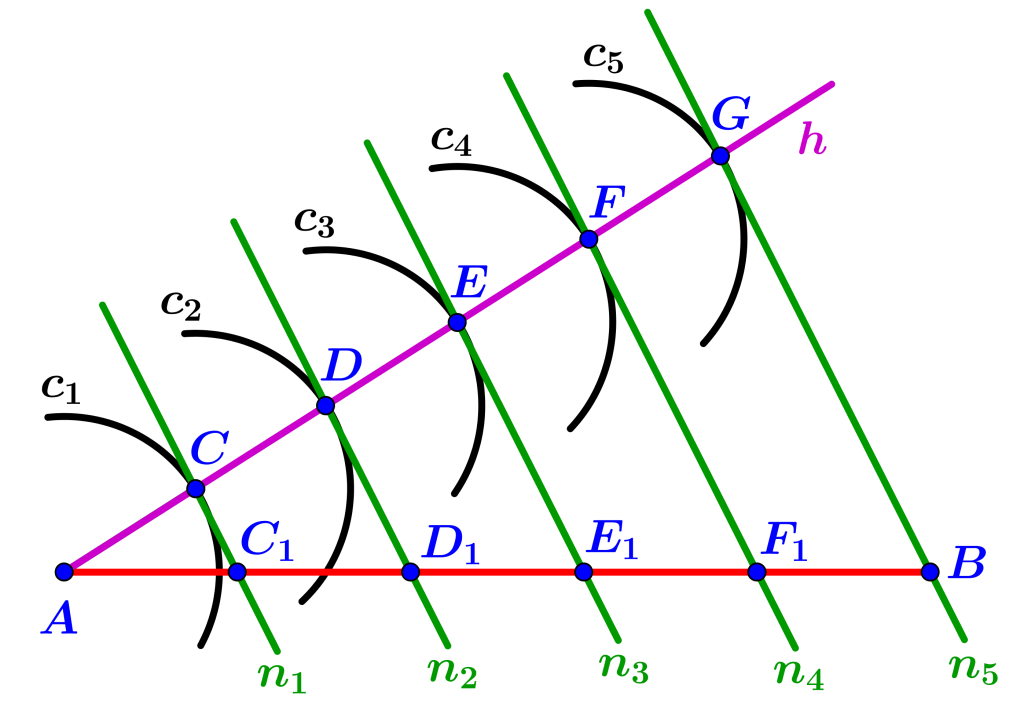
**Constructies**(de paginanummers zijn aangegeven)In een gegeven punt van een lijn de loodlijn oprichten………………………………………………………….. 4  
Vanuit een gegeven punt buiten een lijn de loodlijn op die lijn neerlaten……………………………….. 5  
Door een gegeven punt buiten een gegeven lijn de lijn evenwijdig aan die gegeven lijn tekenen……………………………………………………………………………………………………………………………….. 6De middelloodlijn van een lijnstuk construeren……………………………………………………………………. 7  
De deellijn van een hoek construeren…………………………………………………………………………………... 8  
Een lijnstuk in een gegeven aantal gelijke stukken verdelen………………………………………………….. 9  
De omgeschreven cirkel van een driehoek construeren……………………………………............................... 10  
De ingeschreven cirkel van een driehoek construeren…………………………………………………………... 11  
Een gelijkzijdige driehoek construeren met een gegeven lijnstuk als zijde………………………………. 12  
Een vierkant construeren met een gegeven lijnstuk als zijde………………………………………………….. 13  
Een regelmatige zeshoek construeren met een gegeven lijnstuk als zijde……………………………….. 14  
Een regelmatige vijfhoek construeren met een gegeven lijnstuk als zijde……………………………….. 15-18  
Het middelpunt van een cirkel construeren………………………………………………………………………….. 19  
Van een cirkel een ingeschreven gelijkzijdige driehoek construeren……………………………………... 20-21   
Van een cirkel een ingeschreven vierkant construeren…………………………………………………………. 22  
Van een cirkel een ingeschreven regelmatige vijfhoek construeren………………………………………. 23-26  
Een cirkel construeren door een gegeven punt die een lijn in een gegeven punt raakt……………. 27   
De raaklijn construeren aan een cirkel die gaat door een gegeven punt op die cirkel……………… 28   
De raaklijnen construeren aan een cirkel vanuit een gegeven punt buiten die cirkel………………. 29  
De gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels construeren………………………………………….. 30-33  
De machtlijn van twee cirkels construeren……………………………………………………….............................. 34

**In een gegeven punt van een lijn de loodlijn oprichten**  
  
Neem een willekeurige lijn en een willekeurig punt op .  
  
We construeren de lijn door die loodrecht staat op .  
  
**Constructiestappen**  
1) Kies een punt op dat niet samenvalt met punt .  
2) Teken . Het tweede snijpunt van met noemen we .  
3) Teken .  
4) Teken . Een van de snijpunten van en noemen we .  
5) Trek .  
  
  
 **Bewering**: is de gezochte loodlijn.  
**Bewijs**  
Er geldt dat en , dus is congruent met  
 (ZZZ). Dit geeft dat . Deze twee hoeken zijn samen gelijk aan , dus elke hoek is gelijk aan . Dit toont aan dat lijn loodrecht staat op lijn .

**Vanuit een gegeven punt buiten een lijn de loodlijn op die lijn neerlaten**  
Neem een willekeurige lijn en een willekeurig punt niet gelegen op .  
  
We construeren de lijn door die loodrecht staat op .  
  
**Constructiestappen**  
1) Teken een cirkel die in twee punten snijdt.   
 Noem de twee snijpunten en .  
2) Teken de twee cirkels en ].   
 Het snijpunt van en verschillend van noemen we .  
3) Trek .   
  
 **Bewering**: is de gezochte loodlijn.  
**Bewijs**  
Vierhoek is een ruit (elke zijde heeft lengte ), dus staan (volgens een bekende eigenschap) de diagonalen loodrecht op elkaar.   
Dit betekent dat lijn loodrecht staat op lijn .  
  
  
  
  
**Door een gegeven punt buiten een gegeven lijn de lijn evenwijdig aan die   
gegeven lijn tekenen**Neem een willekeurige lijn en een willekeurig punt niet gelegen op .  
  
We construeren de lijn door die evenwijdig is aan .  
  
**Constructiestappen**  
1) Teken een cirkel die in twee punten snijdt.   
 Noem de twee snijpunten en .  
2) Teken .  
3) Teken .   
 Het snijpunt van en dat aan dezelfde kant van ligt als punt noemen we .  
4) Trek .  
  
**  
  
Bewering**: is de gezochte lijn.  
**Bewijs**  
Er geldt dat , en , dus is congruent met (ZZZ). Dit impliceert dat . Uit de omgekeerde eigenschap van  
Z-hoeken volgt dan dat lijn evenwijdig is aan lijn .  
  
  
  
  
**De middelloodlijn van een lijnstuk construeren**  
  
Neem een willekeurig lijnstuk .  
  
We construeren de middelloodlijn van lijnstuk .  
  
**Constructiestappen**  
1) Teken .  
2) Teken . De snijpunten van en noemen we en .  
3) Trek .  
  
  
 **Bewering**: is de gezochte middelloodlijn.  
**Bewijs**  
Vierhoek is een ruit (elke zijde is gelijk aan ), dus de diagonalen staan loodrecht op elkaar en delen elkaar middendoor. Hieruit volgt direct dat de middelloodlijn van lijnstuk is.

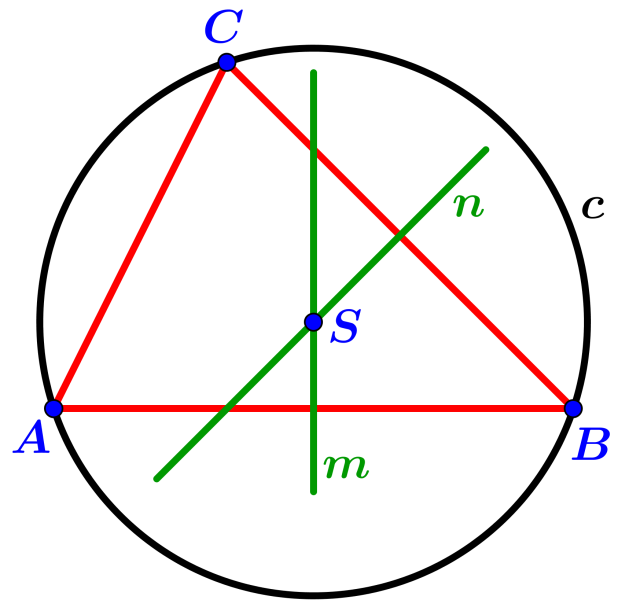
**De deellijn van een hoek construeren**

|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is .  We construeren de deellijn van deze hoek . | **constructies (5a).png** |

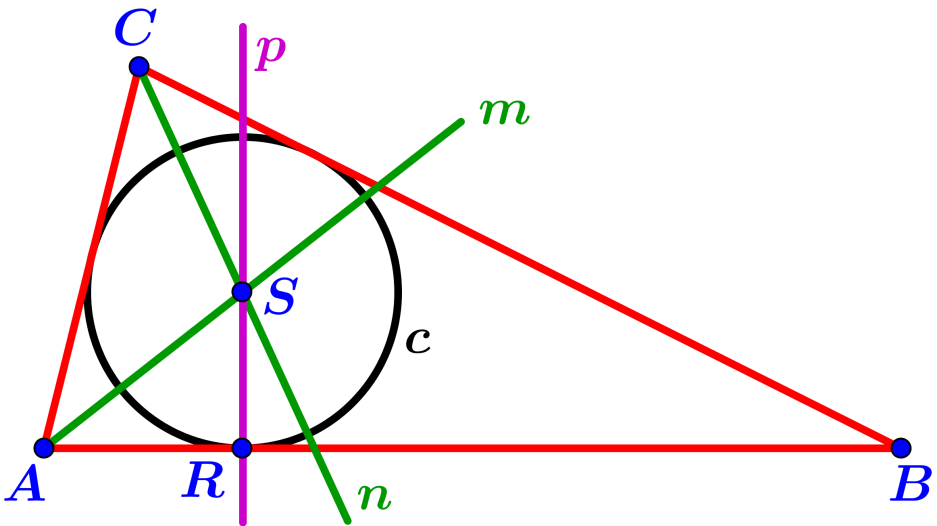
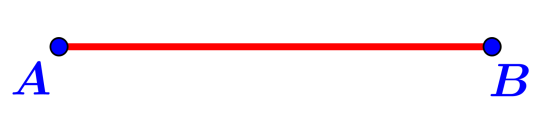
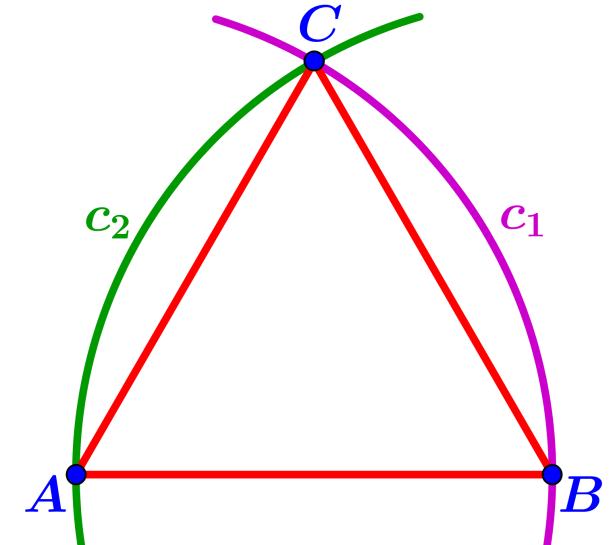
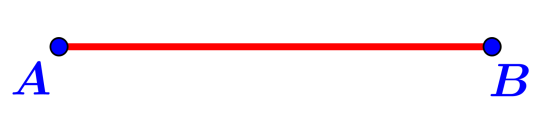
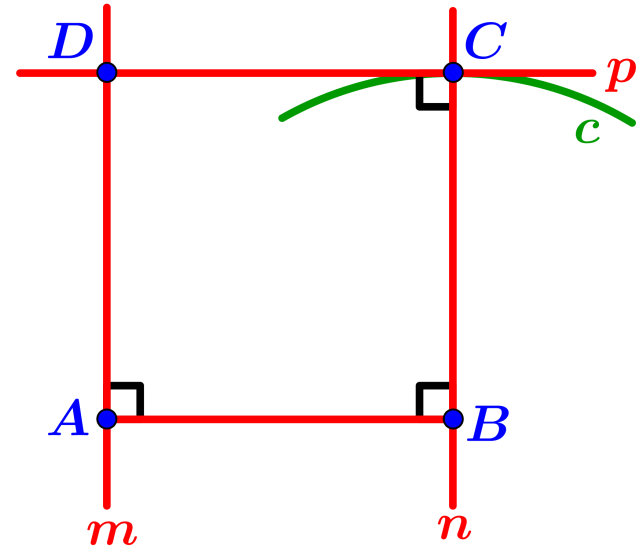
**Constructiestappen**1) Teken een cirkel .  
 De snijpunten van met de benen van de hoek noemen we en .  
2) Teken .  
3) Teken .  
 Het snijpunt van en verschillend van noemen we .  
4) Trek .  
  
 **Bewering**: is de gezochte deellijn.  
**Bewijs**Vierhoekis een ruit (elke zijde heeft lengte ), dus de diagonaal verdeelt in twee gelijke hoeken (bekende eigenschap van een ruit).  
Hieruit volgt direct dat lijn een deellijn van is.  
  
  
  
  
  
  
**Een lijnstuk in een gegeven aantal gelijke stukken verdelen**Gegeven is lijnstuk .  
We willen dit lijnstuk in bijvoorbeeld 5 gelijke stukken verdelen  
(de methodeverloopt analoog voor een willekeurig ander aantal stukken). **Constructiestappen**1)Trek een halflijn met als eindpunt die niet evenwijdig is aan lijnstuk .  
2) Teken een cirkel . Het snijpunt van met noemen we .  
3) Teken . Het snijpunt van met verschillend van noemen we .  
4) Teken . Het snijpunt van met verschillend van noemen we .  
5) Teken . Het snijpunt van met verschillend van noemen we .  
6) Teken . Het snijpunt van met verschillend van noemen we .  
7) Trek .  
8) Construeer de lijnen door , door , door , door die alle evenwijdig  
 zijn aan . De snijpunten met noemen opeenvolgend .  
  
Het is simpel om te bewijzen dat op deze manier lijnstuk in 5 gelijke stukken verdeeld wordt.

**De omgeschreven cirkel van een driehoek construeren**

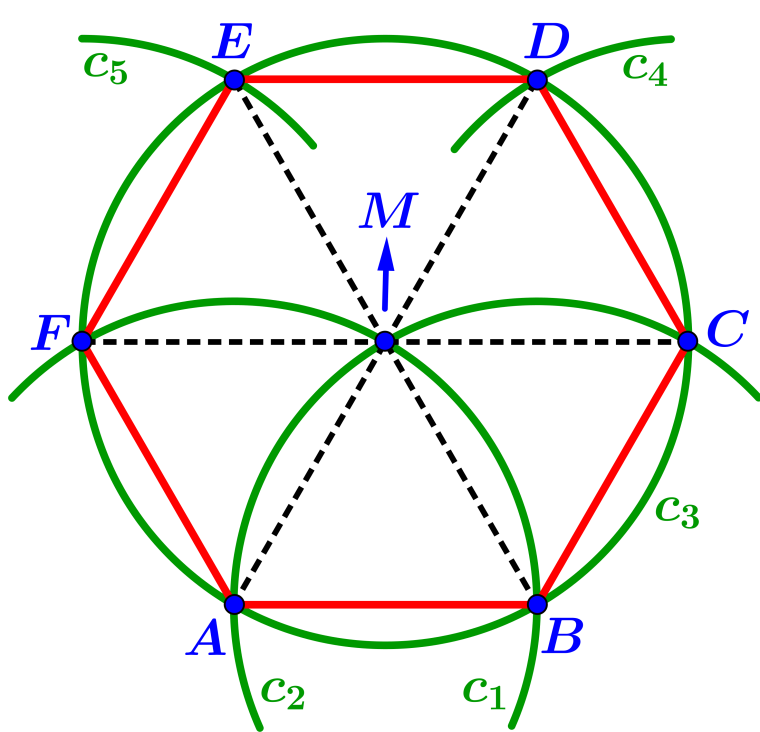
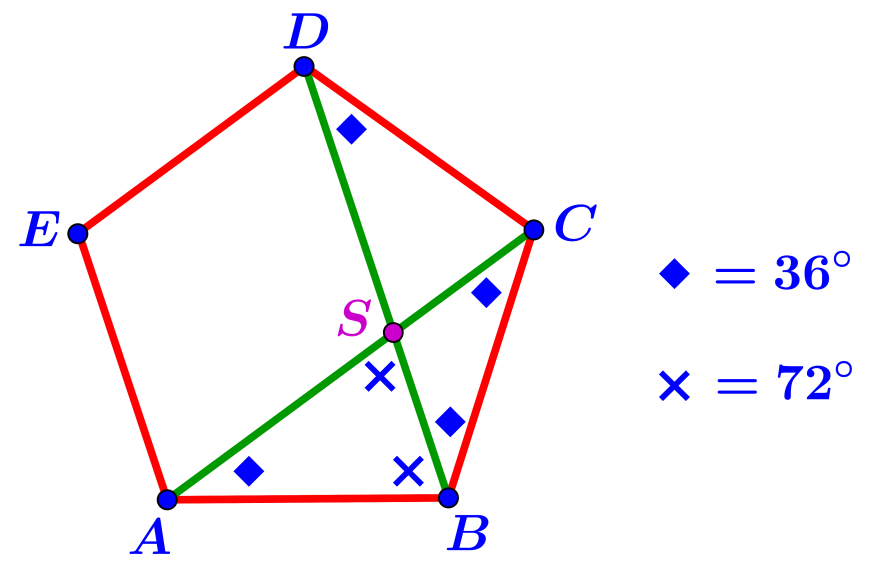
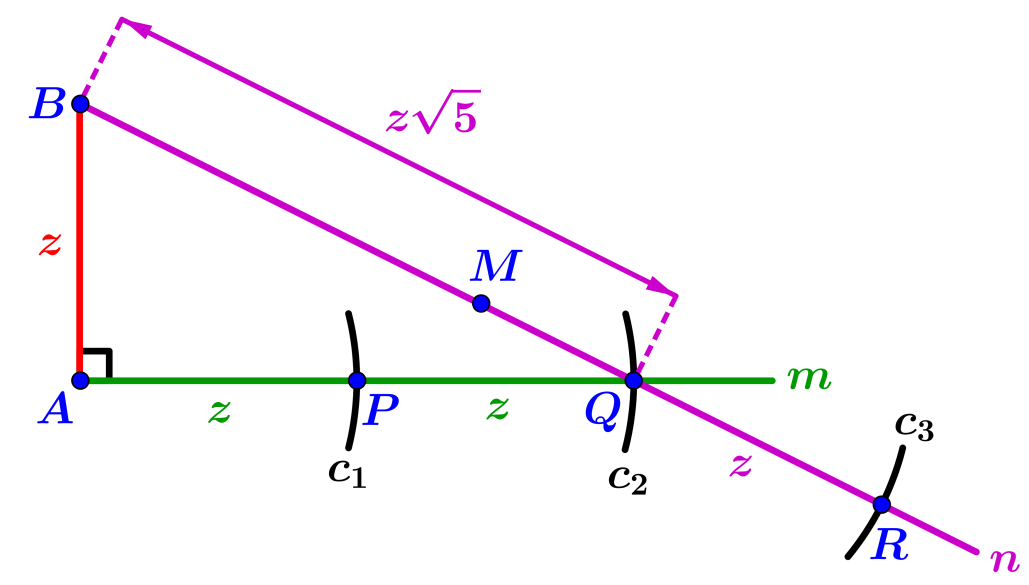
|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is .  We construeren de omgeschreven cirkel van deze driehoek. | **constructies (7a).png** |

**Constructiestappen**  
1) Construeer de middelloodlijn van lijnstuk .  
2) Construeer de middelloodlijn van lijnstuk .  
 Noem het snijpunt van en .  
3) Trek .  
  
  
 **Bewering**: is de omgeschreven cirkel van .  
**Bewijs**We gebruiken tweemaal de bekende eigenschap dat elk punt op de middelloodlijn van een lijnstuk gelijke afstanden heeft tot de eindpunten van dat lijnstuk.  
 ligt op , dus ; ligt op , dus .  
Dit impliceert dat , dus gaat door   
  
  
  
  
  
**De ingeschreven cirkel van een driehoek construeren**

|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is .  We construeren de ingeschreven cirkel van deze driehoek. | **constructies (8a).png** |

**Constructiestappen**1) Construeer de deellijn van .  
2) Construeer de deellijn van .  
Het snijpunt van en noemen we .  
3) Construeer de lijn door loodrecht op .  
 Het snijpunt van en noemen we .4) Teken |  
 **  
  
Bewering**: is de ingeschreven cirkel van .  
**Bewijs**We gebruiken tweemaal de bekende eigenschap dat elk punt op de deellijn van een hoek gelijke afstanden heeft tot de benen van die hoek.   
 ligt op ;  ligt op .   
S ligt daarom op gelijke afstanden (elk gelijk aan ) van de drie zijlijnen van ,  
zodat inderdaad de ingeschreven cirkel is van .  
  
  
  
  
**Een gelijkzijdige driehoek construeren met een gegeven lijnstuk als zijde**  
  
Gegeven is een lijnstuk .  
  
  
  
We construeren een gelijkzijdige driehoek waarvan lijnstuk een van de zijden is.  
  
**Constructiestappen**1) Teken   
2) Teken   
 Een van de snijpunten van en noemen we .  
3) Trek .  
4) Trek .  
 **  
  
Bewering**: is gelijkzijdig.  
**Bewijs** ligt op ; ligt op .  
Er volgt dat , dus is gelijkzijdig.  
  
  
  
  
  
  
  
  
**Een vierkant construeren met een gegeven lijnstuk als zijde**Gegeven is een lijnstuk .  
  
  
  
We construeren een vierkant waarvan lijnstuk een van de zijden is.  
  
**Constructiestappen**1) Construeer de lijn door loodrecht op lijn   
 (verleng daartoe eerst lijnstuk aan de kant van ).  
2) Construeer de lijn door loodrecht op lijn .  
 (verleng daartoe eerst lijnstuk aan de kant van ).  
3) Teken . Het snijpunt van en noemen we .  
4) Construeer de lijn door loodrecht op lijn .  
 Het snijpunt van en noemen we .  
  
  
  
**Bewering**: is een vierkant.  
**Bewijs**  
Uit de constructie volgt dat . Dit impliceert dat   
(hoekensom vierhoek ), zodat een rechthoek is.   
Het is zelfs een vierkant want .  
  
  
  
  
  
**Een regelmatige zeshoek construeren met een gegeven lijnstuk als zijde**

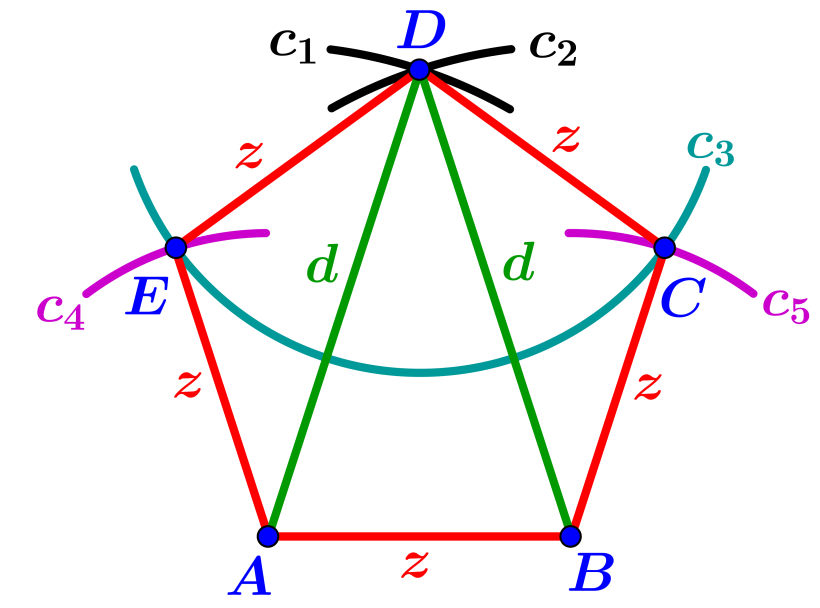
|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is een lijnstuk . We construeren een regelmatige zeshoek waarvan lijnstuk een van de zijden is. | constructies (9a).png |

**Constructiestappen** (Ter afkorting stellen we )1) Teken en .   
 Een van de snijpunten van en noemen we .  
3) Teken .   
 De snijpunten van en met , verschillend van en , noemen we en .  
4) Teken en .  
 De snijpunten van en met , verschillend van en , noemen we en .  
5) Trek de lijnstukken .  
  
**  
  
Bewering**: is een regelmatige zeshoek.  
**Bewijs**  
Uit de constructieblijkt dat, , , en gelijkzijdige driehoeken zijn (elke zijdelengte is gelijk aan ). Dan en , dus ook is gelijkzijdig met elke zijde gelijk aan . Zeshoek heeft daarom zes gelijke zijden en zes hoeken van en is bijgevolg een regelmatige zeshoek.  
  
  
  
  
**Een regelmatige vijfhoek construeren met een gegeven lijnstuk als zijde**  
Dit probleem is aanzienlijk ingewikkelder dan de voorgaande constructies en daarom laten we aan de constructie eerst een **analyse** voorafgaan. We zullen eerst een eigenschap afleiden van de regelmatige vijfhoek. Laat een regelmatige vijfhoek zijn.  
  
We trekken de diagonalen en ; het snijpunt noemen we .   
Elke hoek van vijfhoek is gelijk aan (want de som van de hoeken van een hoek is gelijk aan ). Omdat en gelijkbenig zijn volgt er dat . Verder geldt:  
 en .  
Dit betekent dat gelijkbenig is (twee gelijke hoeken) met .  
We stellen (= zijde) en (= diagonaal) .   
Er geldt dat gelijkvormig is met (twee paren gelijke hoeken), dus , zodat , , .   
Dit is een tweedegraadsvergelijking in met discrimimant , dus de oplossingen zijn . Slechts ∙ *z* voldoet(want ). Omdat alle diagonalen van een regelmatige vijfhoek even lang zijn, hebben we hiermee het volgende gevonden:  
  
 **bij een regelmatige vijfhoek is de lengte van elke diagonaal gelijk aan  
 maal de lengte van de zijde.**  
  
**Eigenschap 1**  
Bij een gegeven lijnstuk met lengte kan een ander lijnstuk geconstrueerd worden waarvan de lengte gelijk is aan ∙ *z*.  
  
**Constructiestappen**1) Richt in punt een halve loodlijn van lijn op  
 (gelegen aan één kant van lijn ).  
2) Teken . Het snijpunt van en noemen we .  
3) Teken . Het snijpunt van en dat niet samenvalt met noemen we .  
4) Trek de halflijn .  
5) Teken . Het snijpunt van en dat niet tussen en ligt noemen we .  
6) Construeer (e.v.t. met behulp de middelloodlijn van lijnstuk ) het midden van  
 lijnstuk .  
  
**Bewering**: lijnstuk heeft lengte ∙ *z*.  
**Bewijs**  
M.b.v. de stelling van Pythagoras volgt: , dus .  
Dit impliceert dat , dus ∙ *z*.   
  
**Eigenschap 2**  
Als een vijfhoek is (zonder inkepingen) met elke zijde gelijk aan en   
 ∙ *z*, dan is een regelmatige vijfhoek.  
**Bewijs**  
We vergelijken vijfhoek met de *regelmatige* vijfhoek waarvan   
. In beide figuren is ∙ *z.*

|  |  |
| --- | --- |
| constructies (12e).png | constructies (12f).png |

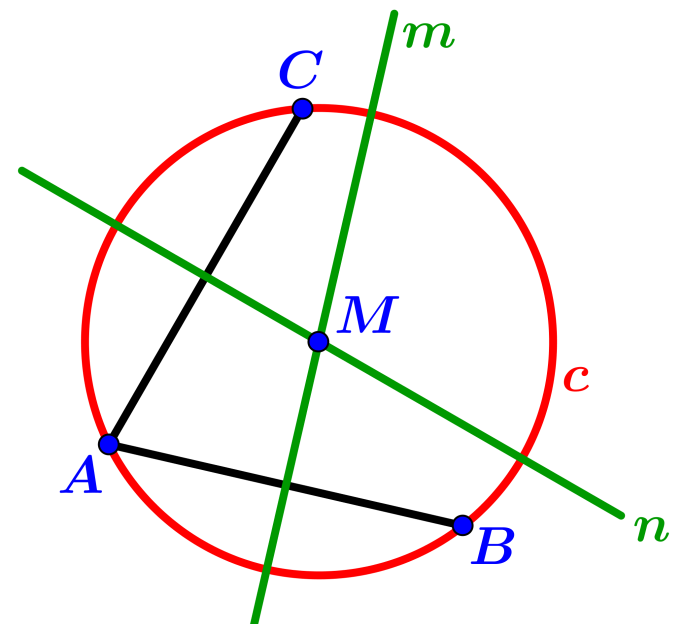
Zoals we eerder gezien hebben geldt dan dat . Uit de drie betrekkingen:  
 is congruent met , is congruent met en  
 is congruent met (steeds vanwege het ZZZcongruentiekenmerk)  
volgt dat alle hoeken van vijfhoek gelijk zijn aan de overeenkomstige hoeken van vijfhoek . Dit impliceert dat een regelmatige vijfhoek is.  
  
Na deze voorbeschouwingen is het duidelijk hoe men een regelmatige vijfhoek met een gegeven lijnstuk als een van de zijden kan construeren.

|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is een lijnstuk . We construeren een regelmatige vijfhoek waarvan lijnstuk een van de zijden is. | constructies (9a).png |

**Constructiestappen**We stellen en ∙ *z*.  
1) Construeer een lijnstuk met lengte (zie eigenschap 1).  
2) Teken en .  
 Een van de snijpunten van en noemen we .  
3) Teken en .  
 Het snijpunt van en dat aan de andere kant ligt van als noemen we .  
4) Teken .  
 Het snijpunt van en dat aan de andere kant ligt van als noemen we .  
5) Trek de lijnstukken .  
   
  
  
Vanwege eigenschap 2 weten dat een regelmatige vijfhoek is.

**Het middelpunt van een cirkel construeren**

|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is een cirkel .We construeren het middelpunt van . | constructies (13a).png |

**Constructiestappen**1) Kies drie punten op de cirkel .  
2) Trek de lijnstukken en .  
3) Construeer de middelloodlijn van lijnstuk .  
4) Construeer de middelloodlijn van lijnstuk .  
 Het snijpunt van en noemen we .  
 **Bewering**: is het middelpunt van .  
**Bewijs**  
Het middelpunt van heeft gelijke afstanden tot , dus ligt op en   
en moet derhalve samenvallen met punt .

**Van een cirkel een ingeschreven gelijkzijdige driehoek construeren**

|  |  |
| --- | --- |
| Eerst een analyse vooraf.  Neem aan dat reeds een ingeschreven gelijkzijdige driehoek van cirkel .  geconstrueerd is. We willen de zijdelengte van uitdrukken in de straal van . Neem aan dat het middelpunt is van en dat de straal van gelijk is aan . Laat de loodrechte projectie zijn van op . Lijn is een deellijn van , dus .  Hieruit volgt dat , dus | constructies (13c).png |

. We hebben hiermee gevonden:  
   
**de zijde van een in een cirkel ingeschreven gelijkzijdige driehoek is gelijk aan   
 maal de straal van de cirkel.**  
  
**Eigenschap 1**Bij een lijnstuk met lengte kan men een lijnstuk met lengte construeren.  
**Bewijs**Neem een willekeurig lijnstuk met lengte .De juistheid van de eigenschap blijkt uit het volgende. **Constructiestappen**1) Verleng lijnstuk aan de kant van en pas hierop een lengte af m.b.v.   
 de cirkel . Het snijpunt van met de verlenging van noemen we .  
2) Richt in de loodlijn op lijn op.  
3) Teken . Een van de snijpunten van met noemen we .

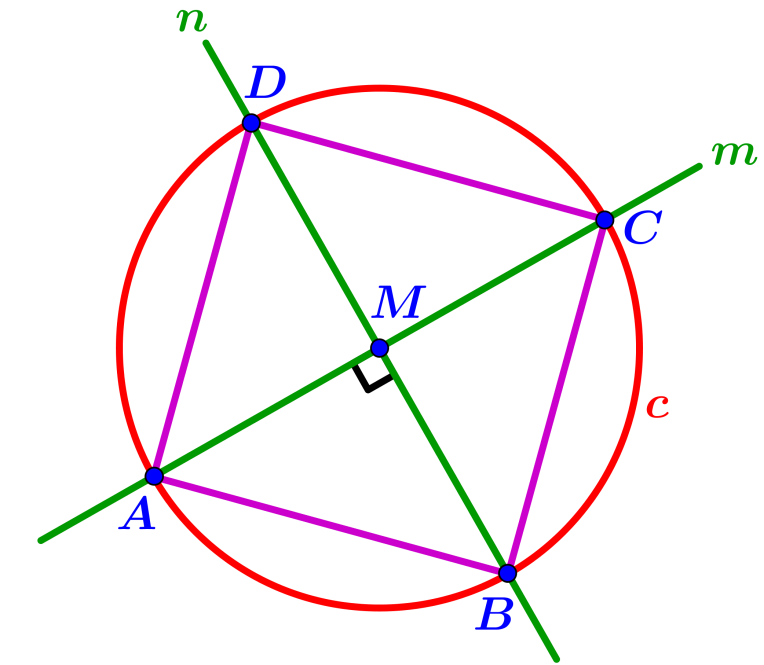
|  |  |
| --- | --- |
| Er geldt nu volgens de stelling van Pythagoras dat: , dus . | constructies (13d).png |

**Eigenschap 2**Stel dat een cirkel is met straal waarop drie punten liggen zodanig dat  
 . Dan is gelijkzijdig.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Laat het middelpunt van zijn. De loodrechte  projecties van op en noemen we en .  is congruent met (ZZR), dus  , zodat cos . Dit impliceert dat . Analoog blijkt dat . Er volgt dat , zodat  (want ). Dit betekent dat gelijkzijdig is. | constructies (13e).png |

Door het combineren van de twee genoemde eigenschappen komen we direct tot een oplossing van onze constructieopgave.  
  
Laat een cirkel gegeven zijn. We willen van een ingeschreven gelijkzijdige driehoek construeren.  
 **Constructiestappen**  
1) Construeer het middelpunt van .  
2) Kies een willekeurig punt op .  
3) Trek lijnstuk . Noem .  
4) Construeer een lijnstuk met lengte (zie eigenschap 1).  
5) Teken De snijpunten van en noemen we en .  
6) Trek de lijnstukken .

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewering**: is gelijkzijdig. **Bewijs** Dit volgt direct uit eigenschap 2. | constructies (13f).png |

**Van een cirkel een ingeschreven vierkant construeren**Laat een cirkel gegeven zijn. We construeren van een ingeschreven vierkant.  
  
**Constructiestappen**  
1) Construeer het middelpunt van .  
2) Trek een willekeurige lijn door .  
 De snijpunten van en noemen we en .  
3) Construeer de lijn door die loodrecht staat op .  
 De snijpunten van ent noemen we en .  
4) Trek de lijnstukken .  
  
 **Bewering**: is een vierkant.  
**Bewijs**  
De vier driehoeken zijn onderling congruent (ZHZ) ,   
elk met twee gelijke basishoeken van , waaruit direct volgt dat een vierkant is.

**Van een cirkel een ingeschreven regelmatige vijfhoek construeren**We laten een analyse voorafgaan en leiden hierbij enkele nuttige betrekkingen af.  
  
**Eigenschap 1**  
 .   
**Bewijs**  
We gebruiken het bekende feit dat bij een regelmatige vijfhoek de lengte van elke diagonaal gelijk is aan maal de lengte van de zijde van die vijfhoek. (zie zo nodig pagina 15 van dit document). Stel dat drie opeenvolgende hoekpunten zijn van een regelmatige vijfhoek met zijde 1.

|  |  |
| --- | --- |
| Metbehulp van de cosinusregel volgt: , dus  . Hieruit volgt direct dat . | **constructies (15a).png** |

Passen we nu de formule toe, dan vinden we:  
 . **Eigenschap 2**Een ingeschreven regelmatige vijfhoek van een cirkel met straal heeft een zijdelengte  
 .   
**Bewijs**  
Laat het middelpunt van de cirkel zijn en en twee opeenvolgende hoekpunten van de regelmatige vijfhoek waarvan we de zijdelengte noemen.

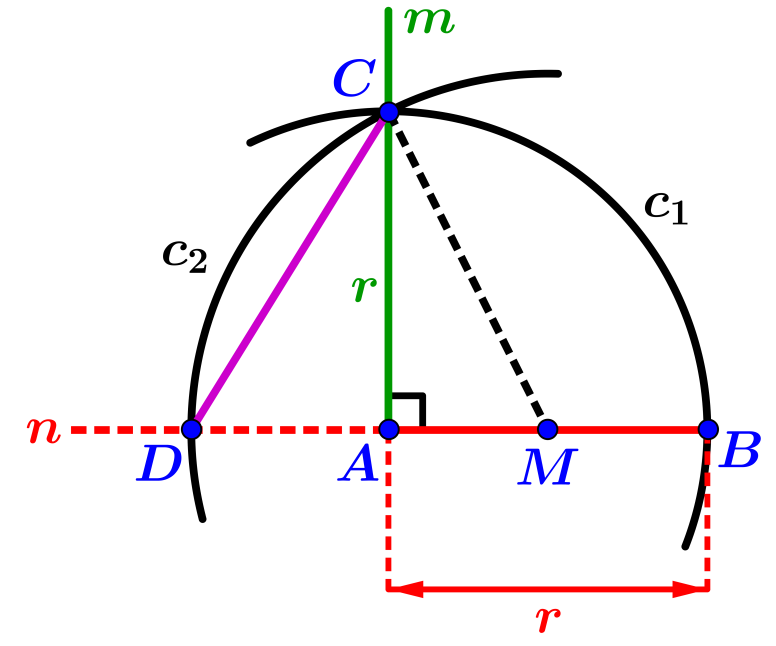
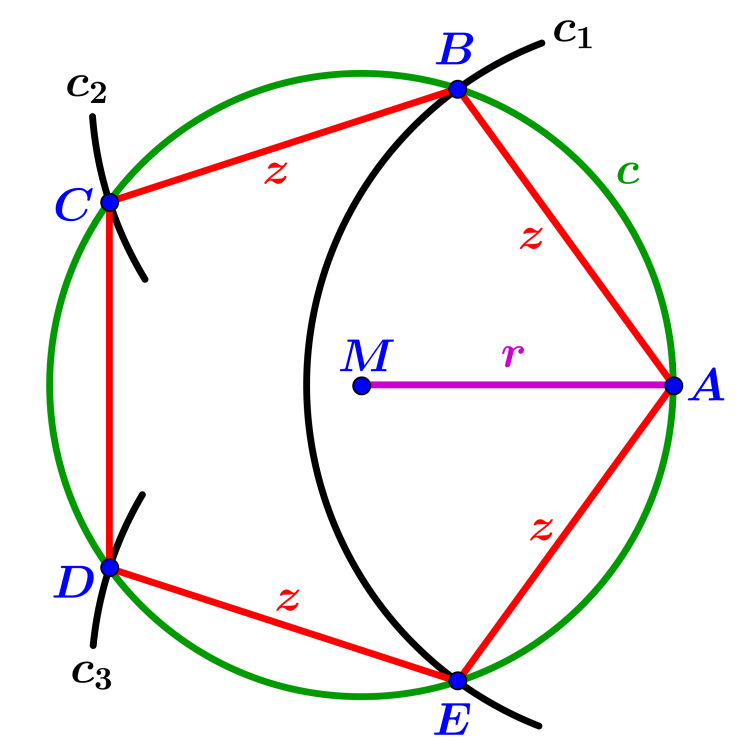
|  |  |
| --- | --- |
| We merken op dat  Met behulp van de cosinusregel volgt:    (zie eigenschap1)   , dus . | *constructies (15b).png* |

**Eigenschap 3**Alsvoor geldt dat en , dan volgt dat .

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** We stellen ter afkorting . Toepassen van de cosinusregel geeft dat  ,  ,  ,  dus .  Hierbij is eigenschap 1 gebruikt. | constructies (15d).png |

**Eigenschap 4**Gegeven is een cirkel met straal . Neem aan dat deze cirkel een ingeschreven vijfhoek heeft waarvan vier zijden gelijk zijn aan .  
Dan is een regelmatige vijfhoek.  
**Bewijs**  
We nemen aan dat .  
Toepassen van eigenschap 3 leert dat .  
Er volgt dat Daarna volgt uit de berekening in het bewijs van eigenschap 2 dat . Vijfhoek heeft daarom vijf gelijke zijden.

|  |  |
| --- | --- |
| Van de vijf gelijkbenige driehoeken   is elke basishoek gelijk aan   , dus elke hoek van vijfhoek is gelijk aan . Hiermee is aangetoond dat een regelmatige vijfhoek is. | constructies (15c).png |

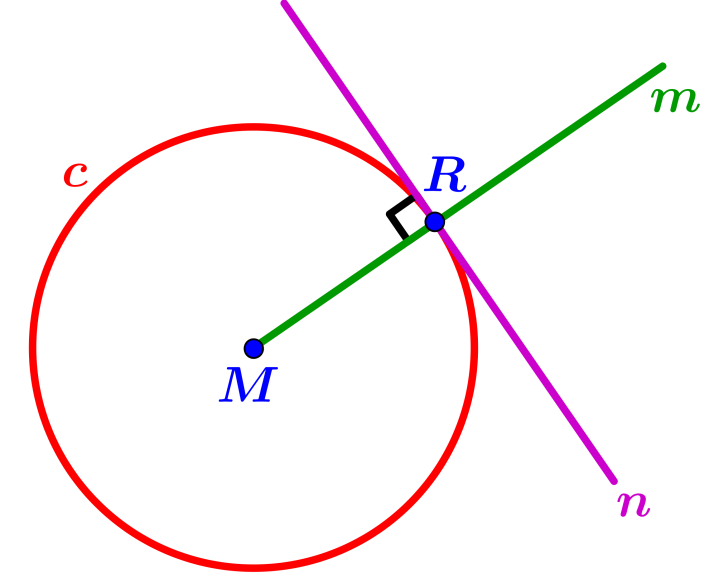
**Eigenschap 5**Bij een lijnstuk met lengte kan een lijnstuk met lengte geconstrueerd worden.  
  
**Bewijs**Laat een lijnstuk met lengte zijn.   
**Constructiestappen**  
1) Construeer het midden van .  
2) Construeer de lijn door die loodrecht staat op lijn .  
3) Teken . Een van de snijpunten van met noemen we .  
4) Verleng aan de kant van . De verlenging noemen we .  
5) Teken . Het snijpunt van met noemen we .  
6) Trek .  
**  
Bewering**: . **Bewijs**De stelling van Pythagoras geeft: , dus . Er volgt dat . Nogmaals Pythagoras toepassen geeft:   
   
 , dus .  
  
We kunnen nu de constructie van een regelmatige vijfhoek in een cirkel met straal uitvoeren.  
 **Constructiestappen**  
1) Construeer het middelpunt van de cirkel .  
2) Kies een willekeurig punt op de cirkel en trek (lijnstuk met lengte ).  
3) Construeer een lijnstuk met lengte (zie eigenschap 5).  
4) Teken . Deze cirkel snijdt in de punten en .  
5) Teken en . Deze cirkels snijden in de punten en (.  
6) Trek .  
  
  
**Bewering**: is een regelmatige vijfhoek.  
**Bewijs**Dit volgt direct uit eigenschap 4.  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
**Een cirkel construeren door een gegeven punt die een lijn in een gegeven punt raakt**

|  |  |
| --- | --- |
| We construeren de cirkel die door punt gaat en lijn in het punt raakt. | constructies (16a).png |
| Stel dat deze cirkel reeds geconstrueerd is. Voor het middelpunt van geldt dan dat  en   is daarom het snijpunt van de loodlijn op door en de middelloodlijn van lijnstuk  Na deze observatie is de constructiemethode  voor de hand liggend. | constructies (16b).png |

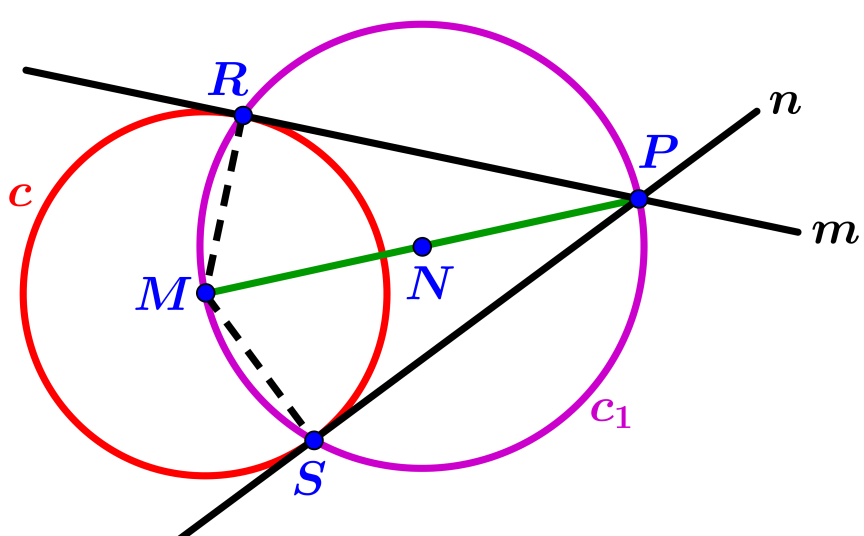
**Constructiestappen**1) Construeer de loodlijn van door .  
2) Construeer de middelloodlijn van lijnstuk .  
 Het snijpunt van en noemen we .  
3) Teken   
  
De cirkel raakt aan (want ) en gaat door (want   
straal ), dus voldoet aan de gewenste eisen.

**De raaklijn construeren aan een cirkel die gaat door een gegeven punt op die cirkel**

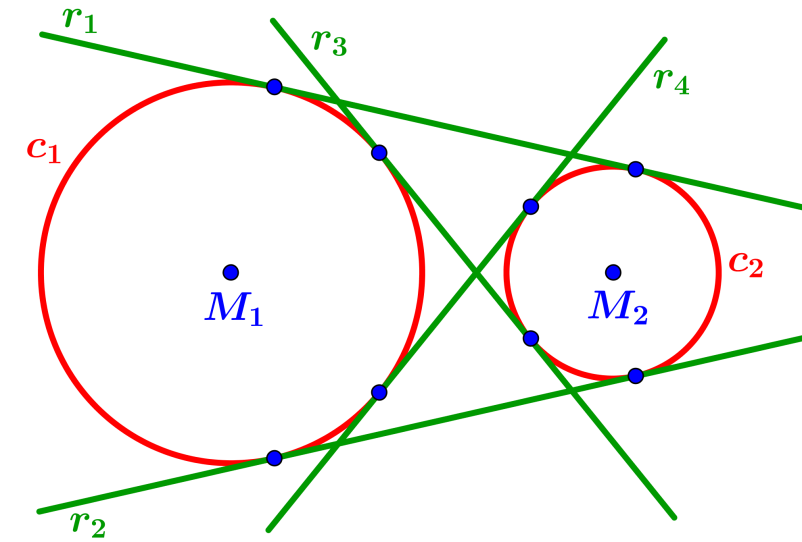
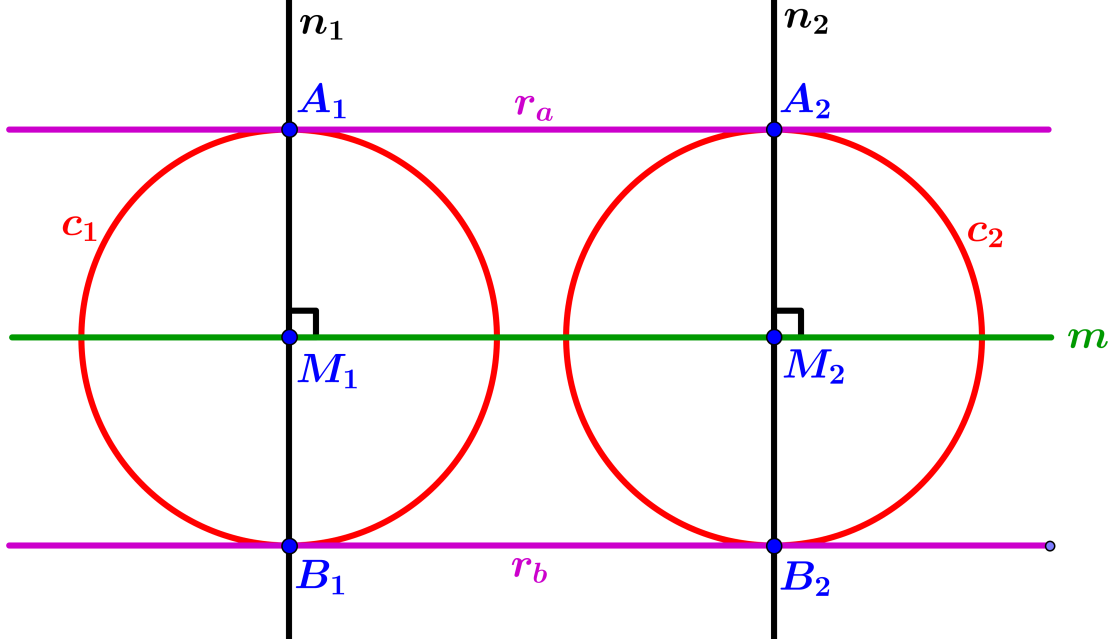
|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is een cirkel waarop een punt ligt.  We construeren de raaklijn aan die door het punt gaat. | constructies (17a).png |

**Constructiestappen**1) Construeer het middelpunt van .  
2) Trek   
3) Verleng aan de kant van (de verlenging is lijn in de figuur).  
3) Construeer de lijn door die loodrecht staat op lijn .  
**  
  
Bewering**: is een raaklijn aan .  
**Bewijs**Voor elk punt van verschillend van geldt volgens de stelling van Pythagoras dat , dus .   
Dit betekent dat buiten ligt.   
Lijn heeft daarom maar een punt gemeen met , dus is een raaklijn aan .  
  
 **De raaklijnen construeren aan een cirkel vanuit een gegeven punt buiten die cirkel**

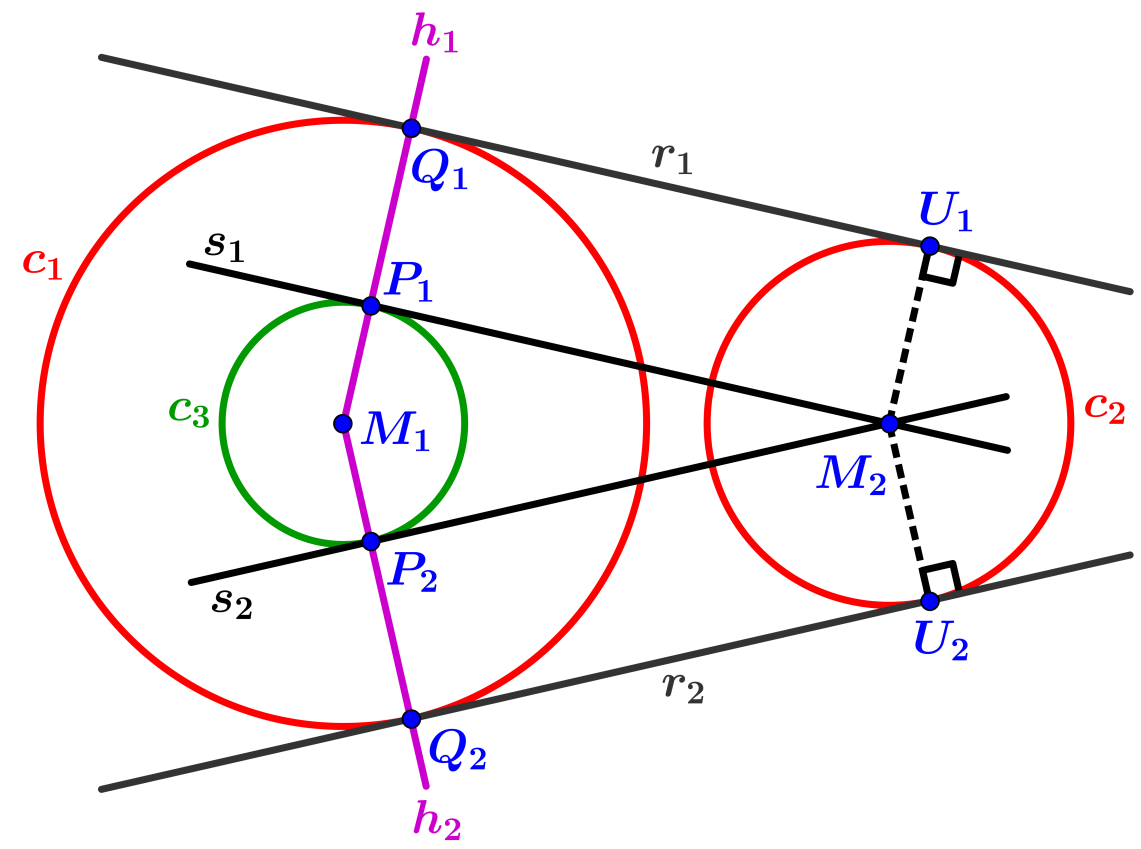
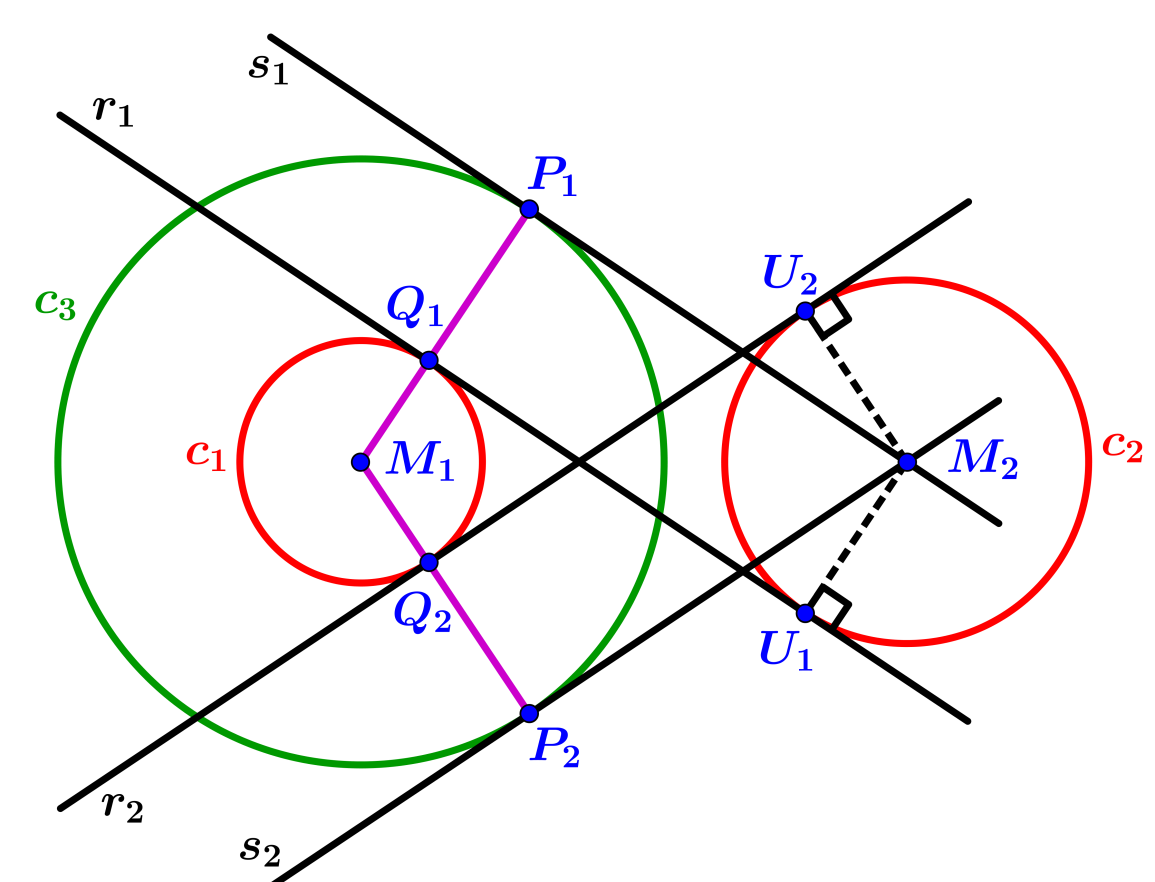
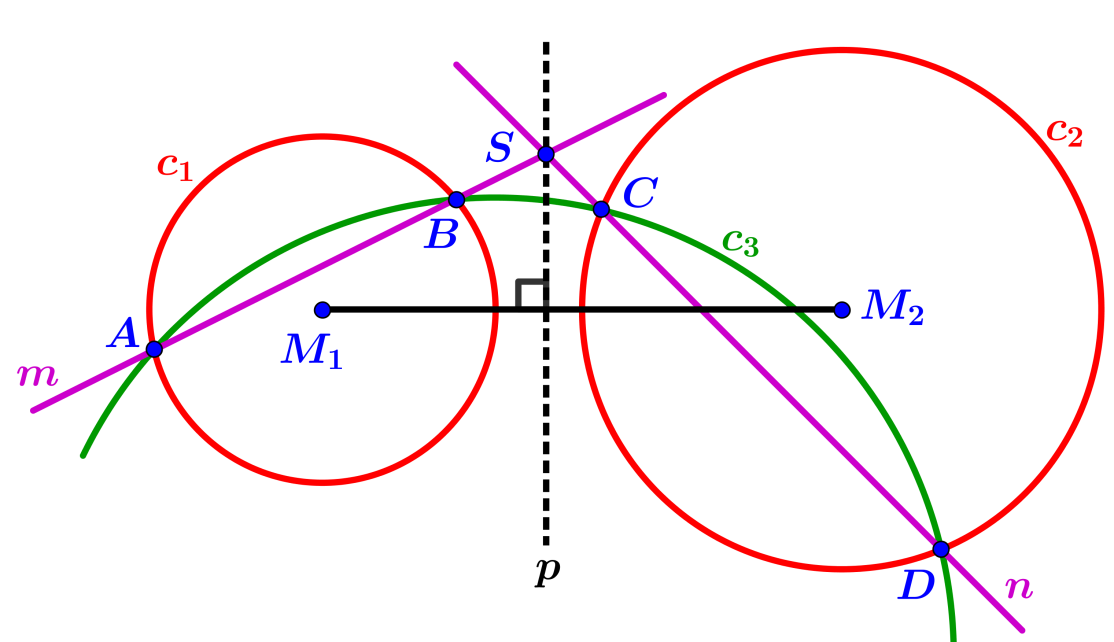
|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is een cirkel en een punt buiten .  We construeren de raaklijnen aan die door gaan. | constructies (18a).png |

**Constructiestappen**1) Construeer het middelpunt van .  
2) Trek   
3) Construeer het midden van   
 (bijvoorbeeld met behulp van de middelloodlijn van ).  
4) Teken . De snijpunten van en noemen we en .  
5) Trek de lijnen en .  
  
  
**Bewering**: de lijnen en raken cirkel .  
**Bewijs**We merken op dat ook door punt gaat. Volgens de stelling van Thales, toegepast op , geldt dat en dit impliceert (zie zo nodig het vorige constructieprobleem) dat raakt aan .  
Analoog toont men aan dat raakt aan .  
  
 **De gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels construeren**  
Het aantal gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels is afhankelijk van de onderlinge ligging van die cirkels. Dit aantal kan gelijk zijn aan . Zie daartoe de volgende figuren.

|  |  |
| --- | --- |
| constructies (19a).png Figuur 1 | constructies (19b).png  Figuur 2 |
| constructies (19c).png Figuur 3 | constructies (19d).png  Figuur 4 |

  
Figuur 5In de situatie van Figuur 1 (een van de cirkels ligt geheel binnen de andere cirkel) is er geen gemeenschappelijke raaklijn. Als twee cirkels elkaar inwendig (Figuur 2) of uitwendig (Figuur 3) raken, dan hebben die cirkels in het raakpunt een gemeenschappelijke raaklijn die zeer eenvoudig te construeren is: het is de lijn door het raakpunt die loodrecht staat op de verbindingslijn van de middelpunten van de cirkels. Een gemeenschappelijke raaklijn van twee cirkels die elkaar niet raken heet een **uitwendige** **raaklijn** als de twee middelpunten van de cirkels aan dezelfde kant van liggen en een **inwendige raaklijn** als die middelpunten aan weerszijden van liggen.   
We hebben dus de uitwendige raaklijnen in de figuren 3, 4 en 5 en de inwendige raaklijnen in Figuur 5.  
  
We zullen eerst de constructie aangeven van de **uitwendige** raaklijnen van twee cirkels . Neem eerst aan dat die twee cirkels een gelijke straal hebben.  
  
**Constructiestappen**  
1) Construeer de middelpunten en van .  
2) Trek de verbindingslijn van en (voldoende ver doorgetrokken).  
3) Construeer de loodlijnen en van die door respectievelijk en gaan.  
 De snijpunten van en noemen we en .  
 De snijpunten van en noemen we en .  
4) Trek de verbindingslijnen van en en van en .  
  
 **Bewering**: en zijn gemeenschappelijke raaklijnen van .  
**Bewijs**We kijken in detail naar vierhoek . Trek de diagonalen en .  
Het snijpunt van de diagonalen noemen we . Noem en .  
We merken op dat (want .

|  |  |
| --- | --- |
| Er geldt dat congruent is met (ZHZ) , dus en . Ook geldt dat en vanwege de rechte hoeken bij en . De driehoeken , en zijn derhalve alle gelijkbenig (gelijke basishoeken), dus . Hieruit volgt, wegens (overstaande hoeken) dat congruent is met (ZHZ), dus . We kunnen hieruit concluderen dat | constructies (19f1).png |

Dit toont aan dat een rechthoek is. De lijn gaat door de punten en van en staat loodrecht op de voerstralen en . Hieruit volgt dat een gemeenschappelijke raaklijn is van . Analoog toont men aan dat een gemeenschappelijke raaklijn is van .  
  
We bekijken nu het geval dat de stralen van de twee cirkels ongelijk zijn.  
Neem aan dat de straal van gelijk is aan en die van gelijk is aan , waarbij .  
  
**Constructiestappen**  
1) Construeer de middelpunten en van .  
2) Teken ].  
3) Construeer de raaklijnen en aan die gaan door . Noem de twee raakpunten en .   
4) Trek de halflijnen en .   
 De snijpunten van met en van met noemen we en .  
5) Construeer de raaklijnen en aan in de punten en .  
  
**Bewering**: en zijn gemeenschappelijke raaklijnen van .  
**Bewijs**  
Laat en de loodrechte projecties van op en zijn. Er geldt dat (raaklijn loodrecht op voerstraal) en . Van de vierhoek zijn daarom drie hoeken gelijk aan , dus is ook de vierde hoek gelijk aan (hoekensom vierhoek). De vierhoek is derhalve een rechthoek. Er volgt dat , dus ligt op . Omdat vinden we dat raakt aan . Hieruit blijkt dat een gemeenschappelijke raaklijn is van . Analoog toont men aan dat een gemeenschappelijke raaklijn is van .  
  
We construeren nu de **inwendige** raaklijnen van twee cirkels .  
**Constructiestappen**  
1) Construeer de middelpunten en van .  
2) ].  
3) Construeer de raaklijnen en aan die gaan door . Noem de twee raakpunten en .  
4) Trek en . De snijpunten van deze lijnstukken met noemen we en .  
5) Construeer de raaklijnen en aan in de punten en .  
**Bewering**: en zijn gemeenschappelijke raaklijnen van .  
**Bewijs**  
Laat en de loodrechte projecties van op en zijn. Er geldt: (raaklijn loodrecht op voerstraal) en . Van de vierhoek zijn daarom drie hoeken gelijk aan , dus is ook de vierde hoek gelijk aan (hoekensom vierhoek). De vierhoek is derhalve een rechthoek. Er volgt dat , dus ligt op . Omdat vinden we dat raakt aan . Hieruit blijkt dat een gemeenschappelijke raaklijn is van . Analoog toont men aan dat een gemeenschappelijke raaklijn is van .  
**De machtlijn van twee cirkels construeren**De machtlijn van twee cirkels en bestaat uit de punten die een gelijke macht hebben t.o.v. die twee cirkels.  
  
We construeren de machtlijn van de twee cirkels .  
  
**Constructiestappen**  
1) Construeer de middelpunten en van .  
2) Trek [,].  
3)Teken een cirkel die snijdt.  
 De snijpunten van en noemen we en .  
 De snijpunten van en noemen we en .  
4) Trek en . Het snijpunt van en noemen we .   
5) Construeer de lijn door die loodrecht staat op [,].  
  
**  
Bewering**:is de machtlijn van .  
**Bewijs**Noem de machtlijn van . We gebruiken enkele bekende eigenschappen van machtlijnen. De machtlijnen van drie cirkels (waarvan de middelpunten niet op één lijn liggen) gaan door één punt, dus gaat door (want is de machtlijn van en en is de machtlijn van en ).   
Verder staat loodrecht op [,]. Hieruit blijkt dat samenvalt met