**Buigpunt en buigraaklijn**Behalve de toppen van de grafiek van een functie zijn ook de zogenaamde buigpunten van belang. Een **buigpunt** van de grafiek van is een punt op de grafiek van met de eigenschap dat een extreme waarde heeft voor . Dit betekent dat de afgeleide van voor gelijk is aan en bij van teken verandert. We zullen in het vervolg korter schrijven als en we noemen dit de **tweede** **afgeleide** van . Als een buigpunt is van de grafiek van dan zijn er vier mogelijke gevallen voor het gedrag van de functies in de buurt van .

|  |  |
| --- | --- |
| Geval 1  buigpunten en buigraaklijn (1a).png | Geval 3 buigpunten en buigraaklijn (1c).png |
| Geval 2 buigpunten en buigraaklijn (1b).png | Geval 4 buigpunten en buigraaklijn (1d).png |

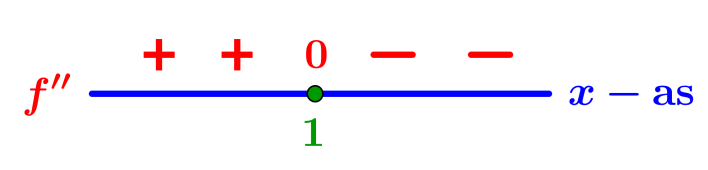
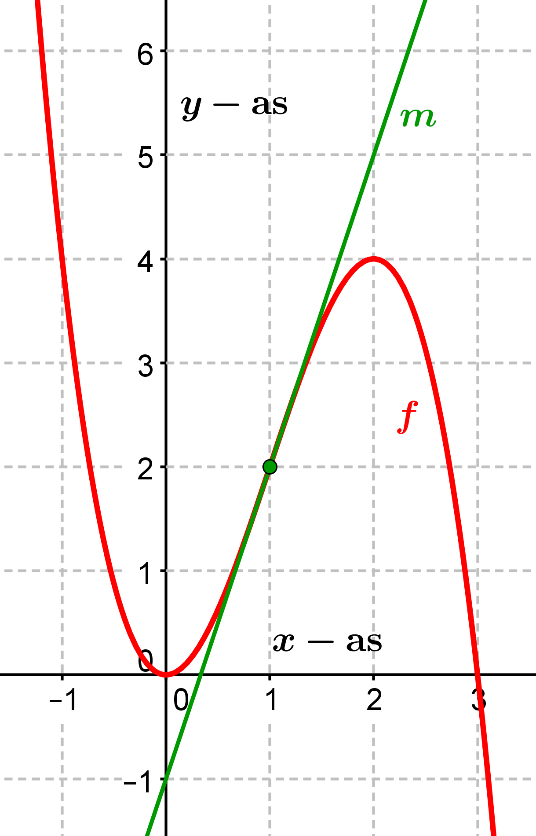
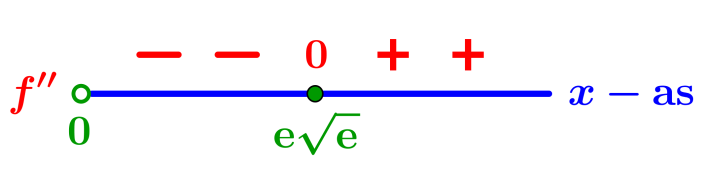
De 4 gevallen die hierboven zijn aangegeven zijn als volgt te beschrijven:  
bij het passeren van gaat de grafiek over van  
toenemend stijgend naar afnemend stijgend in geval 1 ;  
afnemend dalend naar toenemend dalend in geval 2 ;  
afnemend stijgend naar toenemend stijgend in geval 3 ;  
toenemend dalend naar afnemend dalend in geval 4.  
De tweede afgeleide geeft informatie over de **bolling** van een grafiek.  
Als voor een functie op een interval geldt dat voor alle in dan heeft de grafiek op dat interval een naar beneden gerichte bolling ( wordt dan **convex** op genoemd).  
Als voor een functie op een interval geldt dat voor alle in dan heeft de grafiek op dat interval een naar boven gerichte bolling ( wordt dan **concaaf** op genoemd).  
  
**Opmerking**  
We benadrukken dat het voor het zoeken naar een buigpunt **niet voldoende** is om op te lossen  
; moet van teken veranderen (analoog: voor het zoeken naar een extreme waarde is het niet voldoende om op te lossen ; moet van teken veranderen).

|  |  |
| --- | --- |
| Dit kunnen we zien aan het voorbeeld .  Dan en .  geeft . Toch hebben we geen buigpunt bij , want verandert niet van teken bij  ( voor .  Dit is ook aan de grafiek van te zien, die hiernaast staat getekend. Overal is de holle kant van de grafiek naar beneden gekeerd. We kunnen ook via de grafiek van begrijpen dat er geen buigpunt bestaat: en deze functie heeft duidelijk geen extreme waarden. |  |

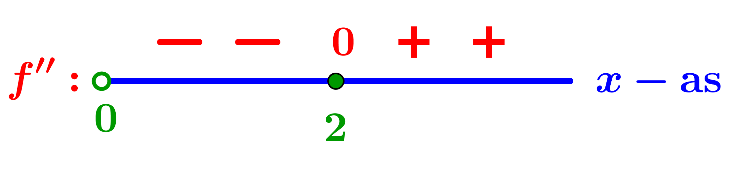
|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1** Beschouw de functie .  Merk op dat en . buigpunten en buigraaklijn (3).png De grafiek van is hiernaast getekend. |  |

Het tekenverloop van leert het volgende:  
\* bij en treden buigpunten op (vanwege de tekenwisselingen);  
\* op het interval geldt dat , dus de grafiek heeft daar een naar boven  
 gerichte bolling;  
\* op de intervallen en geldt dat , dus de grafiek  
 heeft daar een naar beneden gerichte bolling.  
De buigpunten van de grafiek zijn en .  
  
**Eigenschap**  
De grafiek van een derdegraadsfunctie heeft precies één buigpunt.  
  
Het bewijs van deze bewering is evident: de tweede afgeleide van een derdegraadsfunctie is een lineaire functie dus heeft precies één tekenwisseling.  
  
De raaklijn aan een grafiek van een functie in een buigpunt heet een **buigraaklijn**.  
De grafiek ligt in de buurt van het buigpunt aan weerszijden van de buigraaklijn.  
Dit is te zien aan de onderstaande figuren voor elk van de mogelijke vier gevallen voor het gedrag van de functie in de buurt van de waarde van het buigpunt.

|  |  |
| --- | --- |
| buigpunten en buigraaklijn (4a).png | buigpunten en buigraaklijn (4c).png |
| buigpunten en buigraaklijn (4b).png | buigpunten en buigraaklijn (4d).png |

**Voorbeeld 2**Gegeven is de functie . Bepaal de vergelijking van de buigraaklijn .  
  
**Oplossing**Er geldt: en . We geven een tekenverloop van :  
  
Hieraan zien we dat er een buigpunt optreedt voor . Het buigpunt is   
Verder geldt dat en dit geeft de buigraaklijn .  
  
  
 **Voorbeeld 3**Gegeven is de functie Bepaal de vergelijking van de buigraaklijn .   
  
**Oplossing**  
Er geldt: en.   
 . We geven een tekenverloop van :  
  
Hieraan zien we dat er een buigpunt optreedt voor . Het buigpunt is .   
Verder geldt dat Dit geeft . Deze lijn gaat door , dus  
 , ,   
De vergelijking van de buigraaklijn is daarom :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Voorbeeld 4** Gegeven is de functie ,  waarbij  Bepaal voor welke waarden van er vanuit het punt twee raaklijnen zijn de trekken aan de grafiek van .  **Oplossing** Hiernaast staat de grafiek van getekend. Om ons te oriënteren op het probleem nemen we twee punten op de as, bijvoorbeeld  ) en . Zie de volgende figuur. | |  | |
| We zien dat er vanuit geen raaklijn te trekken is en vanuit het punt twee raaklijnen. Waar ligt precies de grens?  Na enig nadenken zien we in dat er precies één raaklijn te trekken is vanuit het punt op de as waar de buigraaklijn aan de grafiek van de as snijdt.  Vanuit punten met is er geen raaklijn te trekken en vanuit de punten met zijn er twee raaklijnen te trekken. We bepalen daarom de vergelijking van de buigraaklijn aan de grafiek van .   .   . geeft . |  | |

  
Vanwege de tekenwisseling zien we dat er een buigpunt is voor . Het buigpunt is . De rc van is gelijk aan . Hieruit vinden voor de vergelijking van  
. Het snijpunt van met de as is het punt . We kunnen hieruit concluderen dat er juist dan twee raaklijnen zijn te trekken aan de grafiek van als .

De voorgaande opgave is ook anders op te lossen. Voor de waarden van de raakpunten aan de grafiek van vanuit het punt moet er gelden dat  
 , dus . Dit is te vereenvoudigen tot  
, oftewel .  
Deze vergelijking moet twee oplossingen hebben, dus .  
Vanwege de eis dat , komen we tot .