**Aantonen van symmetrie bij grafieken van functies  
  
A) Lijnsymmetrie**  
Gegeven is een functie met domein en een getal . Het getal hoeft niet tot te behoren.  
De grafiek van is **lijn-symmetrisch** in de lijn als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:  
I): is symmetrisch t.o.v. , d.w.z. dat er voor elk getal geldt:   
 ligt in ⟺ ligt in ;  
II): voor elk getal waarvoor in ligt, geldt dat .

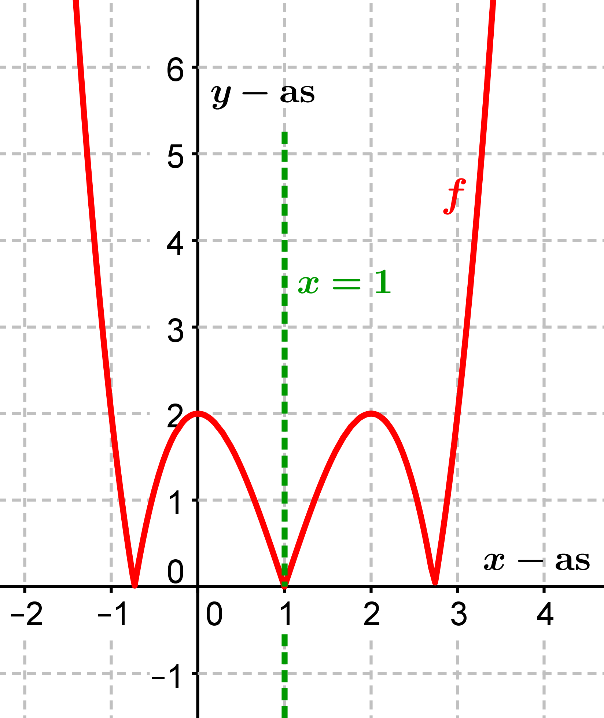
|  |  |
| --- | --- |
| Vaak bestaat uit alle reële getallen, anders  uitgedrukt . In dit geval geldt:  de grafiek van is **lijn-symmetrisch** in de lijn  als voor elk getal voldaan is aan .  Zie hiernaast een voorbeeld van een grafiek die   lijn-symmetrisch is. (als , dan ligt links van ).    Als speciaal geval hebben we: |  |

de grafiek van is lijn-symmetrisch in de as (dus in de lijn ) als voor elk getal voldaan is aan .  
  
**Voorbeeld 1**  
Gegeven is de functie .   
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**   Voor elk getal geldt dat    en      , dus de grafiek van is lijn-symmetrisch  in de lijn . |  |

**Opmerking 1**  
Nadat we in het bovenstaande voorbeeld uitgerekend hebben dat , kunnen we sneller dan hierboven bepalen. De betrekking geldt namelijk voor elk getal , dus geldt ook als we vervangen door .   
Dit geeft dat .  
Deze aanpak zullen we ook in latere voorbeelden toepassen.  
  
**Voorbeeld 2**  
Gegeven is de functie .   
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Voor elk getal geldt dat      , dus    .  De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de   lijn . |  |

**Opmerking 2**  
Stel dat een veelterm is (constante veelvouden van machten van bij elkaar opgeteld).  
Dan zal de grafiek van lijn-symmetrisch zijn in de lijn als na het uitwerken en herleiden van alleen even machten van voorkomen. Er volgt dan direct dat  
, want als een even getal is.   
Dit verschijnsel hebben we gezien in de voorbeelden 1 en 2.  
  
**Voorbeeld 3**  
Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .  
  
**Oplossing**Voor elk getal geldt dat  
   
, dus .  
De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn .  
**  
  
Voorbeeld 4**Gegeven is de functie   
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  We bepalen eerst het domein van .  Er moet gelden dat , , dus  . Derhalve . Dit domein is   symmetrisch t.o.v. het getal 2. We merken op dat   juist dan tot behoort als .  Voor elk getal , met , geldt dat    , dus  . |  |

De grafiek van is derhalve lijn-symmetrisch in de lijn .  
  
**Opmerking**  
De grafiek van in voorbeeld 4 is een halve cirkel. Dit is als volgt in te zien.  
Stel . Kwadrateren geeft dat , dus , oftewel   
. Dit stelt, zoals bekend, een cirkel voor met middelpunt en straal 2.  
De punten van de grafiek van vormen de bovenste helft van deze cirkel omdat .  
  
**Voorbeeld 5**  
Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Voor elk getal geldt dat      , dus de grafiek van is   lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

**Voorbeeld 6**Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Methode 1** Voor elk getal geldt dat      ,  dus de grafiek van is lijn-symmetrisch in de lijn  . |  |

**Methode 2**M.b.v. de eigenschappen  
 en   
vinden we dat   
   
  , dus  
 .  
De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn .  
  
**Methode 3**M.b.v. de eigenschap blijkt dat  
 . De grafiek van de functie is symmetrisch in de as (omdat ), dus (translatie!) de grafiek van is lijn-symmetrisch in de lijn .  
**Voorbeeld 7**  
Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Voor elk getal geldt dat  en    .  Door het kwadraat van de eerste betrekking op   te tellen bij de tweede vinden we:  .  De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in  de lijn . |  |

**Voorbeeld 8**Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Voor elk getal geldt dat       ,  dus   . |  |

De grafiek van is daarom lijn-symmetrisch in de lijn .  
 **Voorbeeld 9**Gegeven is de functie .   
Toon aan dat de grafiek van lijn-symmetrisch is in de lijn .

**Oplossing**  
We bepalen eerst het domein van . Er moet gelden dat , , dus  
. We merken op dat symmetrisch is t.o.v. het getal 4.

|  |  |
| --- | --- |
| behoort tot .  Voor elk getal , met , geldt:    , dus    .  De grafiek van is daarom  lijn-symmetrisch in de lijn . |  |

**B) Puntsymmetrie**  
Gegeven is een functie met domein en een punt . Het punt hoeft niet op de grafiek van   
 te liggen. De grafiek van is **punt-symmetrisch** t.o.v. het punt als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:  
I): is symmetrisch t.o.v. , d.w.z. dat er voor elk getal geldt:   
 ligt in ⟺ ligt in ;  
II): voor elk getal waarvoor in ligt, geldt dat (\*).  
De betrekking (\*) betekent dat het gemiddelde is van de getallen en .

|  |  |
| --- | --- |
| Vaak bestaat uit alle reële getallen,   anders uitgedrukt .  In dit geval geldt:  de grafiek van is **punt-symmetrisch** t.o.v.   het punt als voor elk getal geldt  dat .  Zie hiernaast een voorbeeld van een grafiek  die punt-symmetrisch is   (als , dan ligt links van ). |  |

Als speciaal geval hebben we:  
de grafiek van is punt-symmetrisch in de oorsprong als voor elk getal geldt dat  
.  
  
**Voorbeeld 10**  
Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Voor elk getal geldt dat   , dus  .   Er volgt dat  , dus de grafiek van is punt-symmetrisch  t.o.v. het punt .   **Opmerking**  Het punt is het **buigpunt** van de grafiek van .  Algemeen kan men aantonen dat de grafiek van een  derdegraadsfunctie punt-symmetrisch is t.o.v. het buigpunt. |  |

**Voorbeeld 11**Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  geeft eenvoudig dat , dus  . is symmetrisch t.o.v. het getal 6.  We merken op dat juist dan tot behoort als  . Voor elk getal , met , geldt dat    , dus . Er volgt dat . De grafiek van is daarom punt-symmetrisch t.o.v. het punt .  De puntsymmetrie is evident als we herschrijven als . |  |

De functie is punt-symmetrisch in , dus (translatie!) de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt .  
 **Voorbeeld 12**Gegeven is de functie .   
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Het domein bestaat uit alle reële getallen,   met uitzondering van , d.w.z. .  Voor elk getal , met , geldt dat  , dus  .   Er volgt dat     , dus de grafiek van is   punt-symmetrisch t.o.v. het punt . |  |

**Opmerking**Het punt is het snijpunt van de twee asymptoten van de grafiek van .  
Algemeen geldt dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. de snijpunt  
van de asymptoten en van de grafiek van . **Voorbeeld 13**  
Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  We bepalen eerst het domein van .  geeft .  is symmetrisch t.o.v. het getal 0.  behoort tot   .  Voor elk getal , met , geldt dat  en     . |  |

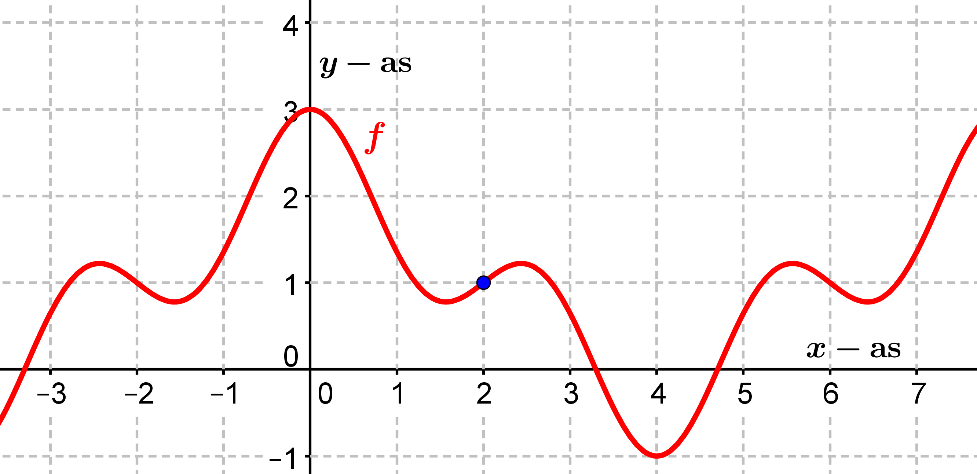
(want ).   
Er volgt dat .  
De grafiek van is daarom punt-symmetrisch t.o.v. het punt .

**Voorbeeld 14**Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Oplossing**  Voor elk getal geldt dat    ,  dus  . Er volgt dat , dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt . |  |

**Voorbeeld 15**Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Methode 1**  Voor elk getal geldt dat  en      ( en )   ( en ). |  |

Er volgt dat , dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt .  
  
**Methode 2**  
M.b.v. de eigenschappen  
 en   
vinden we dat:   
   
∙∙ ∙∙ , dus  
.  
Er volgt dat : , dus de grafiek van is punt-symmetrisch t.o.v. het punt .  
  
**Methode 3**M.b.v. de eigenschap blijkt dat  
. De functie is punt-symmetrisch t.o.v. het punt   
 (omdat , dus (translatie!) is de grafiek van punt-symmetrisch t.o.v. het punt .  
  
**Voorbeeld 16**  
Gegeven is de functie .  
Toon aan dat de grafiek van punt-symmetrisch is t.o.v. het punt .  
  
**Oplossing**  


Voor elk getal geldt:   
, dus  
.  
Er volgt dat .  
De grafiek van is daarom punt-symmetrisch t.o.v. het punt .