**Lissajouskrommen**Een **Lissajouskromme** is een kromme (meetkundige figuur) met als parametrisering   
 ,  
waarbij constanten zijn met , en een parameter is die een bepaald interval doorloopt.  
 is begrensd, want voor elk punt van geldt dat en .  
We kunnen de parametrisering herschrijven als  
 ,   
waarbij en . Hierbij is weer een parameter.  
Derhalve mogen we er van uit gaan dat als parametrisering heeft:  
 . (1)  
  
Soms zullen we, ter wille van de afkorting, gebruik maken van de functies  
 en .  
  
**I)** We onderzoeken eerst het geval dat .   
Met de somformule voor de sinus volgt:  
,  
 (2)  
[hierbij is gebruikt dat ] . We onderscheiden twee gevallen.  
**I)1**  , dus voor een zeker geheel getal .  
Uit (2) blijkt dat alle punten van liggen op het lijnstuk met vergelijking  
 , waarbij en .  
Deze vergelijking is nog eenvoudiger te schrijven als  
 , als een even getal is en , als een oneven getal is.  
**I)2** . Kwadrateren van beide leden van (2) geeft:  
 ,   
 ,  
 . (3)  
  
We maken nu gebruik van het volgende bekende resultaat uit de analytische meetkunde   
(dat we hier niet zullen bewijzen).  
Beschouw de kromme Γ gegeven door de vergelijking   
 . Noem . Dan geldt:  
 ;  
 ;  
 .   
Voor de vergelijking in (3) geldt:   
   
dus is een Als (d.w.z. voor een zeker geheel getal ) dan valt in (3) de mengterm weg en de vergelijking kan herleid worden tot   
Dit stelt een ellips voor met de coördinaatassen als symmetrieassen indien en het stelt de cirkel met middelpunt en straal voor als . Als de mengterm in(3) niet wegvalt, dan kan men met (m.b.v. de analytische meetkunde) aantonen dat een *scheve* ellips is, d.w.z. dat elk van de twee symmetrieassen van niet evenwijdig is aan een van de coördinaatassen.  
We hebben hiermee het volgende gevonden.  
  
**Stelling 1**  
Laat de kromme gegeven zijn door .   
Dan geldt:  
 , met geheel ⟹ is het lijnstuk : ;  
 , met geheel ⟹ is het lijnstuk : ;  
, met geheel ∧ ⟹ is de ellips: ;  
, met geheel ∧ ⟹ is de cirkel: ;  
 ∧ ⟹ is een scheve ellips met middelpunt .  
We geven een aantal voorbeelden van de situaties in stelling 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Lissajous (-4).png | | Lissajous (-3).png  , , |
| Lissajous (-2).png  , , | | Lissajous (-1).png  , , | | |
| Lissajous (1).png | Lissajous (2).png | | |

**II)** We bekijken nu het geval dat .  
Neem aan dat alle reële getallen doorloopt. We willen eerst onderzoeken onder welke voorwaarde de kromme **gesloten** is, d.w.z. dat de punten gegeven door (1) na verloop van tijd () weer dezelfde figuur doorlopen. Anders uitgedrukt: onder welke voorwaarde bestaat er een positief getal zodanig dat voor alle reële getallen geldt én , oftewel  
 (4)  
én   
. (5)

Neem eerst aan dat zowel aan (4) als aan (5) voldaan is voor alle reële getallen .  
Door te nemen in (4) vinden we dat en dit impliceert dat   
 voor een zeker geheel getal .Door in (5) zodanig te kiezen dat   
(dus ) vinden we dat , zodat voor een zeker geheel getal . Er volgt dat , dus is een rationaal getal.   
Omgekeerd neem aan dat een rationaal getal is, zeg met en gehele getallen die  
 zijn. De functies en zijn periodiek met  
 en . Noem en .   
Er geldt: , dus .   
Noemen we , dan is voldaan aan  
 en voor alle reële getallen .  
Dit betekent dat de kromme gesloten is. We vatten samen wat gevonden hebben.  
  
**Stelling 2**  
 is gesloten ⟺ is een rationaal getal.   
  
We zullen vanaf nu slechts gesloten Lissajouskrommen beschouwen.  
Dan is gelijk aan een rationaal getal , waarbij en gehele getallen zijn.  
Er volgt dat . In de parametrisering vervangen we de parameter door de parameter . De parametrisering wordt dan   
 en dit beschrijft dezelfde kromme .  
Dit doet inzien dat we mogen aannemen dat en zelf gehele getallen zijn.  
Stel dat de grootste gemeenschappelijke deler van en gelijk is aan , ook wel kort genoteerd als ggd. Dan bestaan er gehele getallen en die geen gemeenschappelijke positieve delers hebben, zodanig dat en . Vervangen we in de parametrisering  
 de parameter door de parameter , dan krijgen we de parametrisering die dezelfde kromme beschrijft, waarin nu, zoals reeds opgemerkt, en geen gemeenschappelijke positieve delers hebben.   
Derhalve kunnen en zullen we in het vervolg aannemen:  
  **en zijn gehele getallen ongelijk aan nul met ggd**   
  
Een punt van een Lissajouskromme heet een **keerpunt** indien in dat punt zowel de waarde en de waarde een uiterste waarde heeft. We schrijven tijdelijk voor het gemak in de vorm .  
In een keerpunt moet gelden dat en , dus en .  
Dit is gelijkwaardig met en , voor zekere gehele getallen en . Er volgt dat .   
Omgekeerd als deze vorm heeft, dan geldt dat .  
Noemen we de gemeenschappelijke waarde van deze twee breuken , dan volgt dat  
 en , dus en .  
In dit geval heeft voor deze waarde een keerpunt. We vatten dit samen.  
  
**Stelling 3**  
De kromme gegeven door heeft een keerpunt   
 voor zekere gehele getallen en .  
  
Het resultaat in stelling 3 kunnen we nog verfijnen. Laat en getallen zijn met   
 en . Dan geldt:  
 is een keerpunt van   
⟺ er bestaat een getal en er zijn gehele getallen en zodanig dat  
 en   
⟺ er bestaan gehele getallen en zodanig dat   
   
⟺ er bestaan gehele getallen en zodanig dat .  
  
Hiermee is de volgende verfijndere versie van stelling 3 gevonden.   
  
**Stelling 3a**Laat en getallen zijn met en .  
 is de kromme gegeven door . Dan geldt:  
 is een keerpunt van   
⟺ er bestaan gehele getallen en zodanig dat .  
  
We onderzoeken eerst nog verder het interessante speciale geval (dus .  
De kromme gegeven door heeft volgens stelling 3 precies dan een keerpunt als voor zekere gehele getallen en .  
Dit laatste is juist dan het geval als en beide oneven getallen zijn. Samenvattend:  
  
**Stelling 4** gegeven zijn door .  
Dan geldt:  
 heeft een keerpunt ⟺ voor zekere gehele getallen en ⟺   
 en zijn beide oneven getallen.

Hieronder staan twee voorbeelden van de situatie in stelling 4.

|  |  |
| --- | --- |
| Lissajous (4).png  . | Lissajous (4a).png  . |

Het geval onderzoeken we nog wat diepgaander om informatie te verkrijgen over het aantal keerpunten en de onderlinge ligging van die punten. Het aantal keerpunten is natuurlijk maximaal 4.  
Neem aan minstens één keerpunt heeft. Omdat en , voor alle reële getallen , is puntsymmetrisch t.o.v. de oorsprong. Dit impliceert dat twee keerpunten heeft die elkaars spiegelbeeld zijn bij spiegelen t.o.v. de oorsprong. We zullen aantonen dat er niet meer dan twee keerpunten zijn en bovendien nagaan wanneer de twee keerpunten en zijn en wanneer de keerpunten en zijn. We kunnen gelet op stelling 4 aannemen dat  
 en , voor zekere gehele getallen en , waarbij  
 en . Laat voor en *σ* gelden dat  
 en .  
  
Volgens stelling 3a geldt:   
 heeft het keerpunt   
⟺ er zijn gehele getallen en zodanig dat (6)  
We zullen aantonen dat het criterium in (6) gelijkwaardig is met .  
Stel dat aan (6) is voldaan. Kruiselings vermenigvuldigen geeft  
 en dit is te herschrijven tot  
.  
We zien hieraan dat deelbaar is door 4. Evident is echter dat voor alle mogelijke tekens van , *ε* en slechts de waarden en kan aannemen. Er volgt dat   
 , dus . Omgekeerd stel dat er geldt dat . Door teller en noemer van de breuk met te vermenigvuldigen vinden we  
 ,  
dus er is aan (6) voldaan als we nemen en .

Hiermee is aangetoond dat (6) gelijkwaardig is met   
Merk op dat betekent dat en dezelfde rest hebben bij deling door 4 en dat betekent dat en een ongelijke rest hebben bij deling door 4.  
Uit en volgt dat en uit en volgt dat  
 . Hiermee is het volgende afgeleid.  
  
**Stelling 5**  
 gegeven zijn door .  
Neem aan dat een keerpunt heeft (dus en zijn beide oneven).  
Dan geldt:  
1) heeft precies twee keerpunten die gespiegeld liggen t.o.v. de oorsprong.  
2) heeft de keerpunten en ⟺   
 en hebben dezelfde rest bij deling door 4.  
3) heeft de keerpunten en ⟺   
 en hebben een ongelijke rest bij deling door 4.  
  
We onderzoeken nu meer in detail de keerpunten van de kromme gegeven door  
gegeven door ,   
waarbij we nog steeds aannemen dat en gehele getallen zijn waarvan de grootste gemene deler gelijk is aan 1.  
Het criterium voor zekere gehele getallen en uit stelling 3 voor een keerpunt willen we vertalen naar een directe betrekking tussen en (waarin geen en voorkomen).  
 is na kruiselings vermenigvuldigen te herleiden tot  
 . Hieruit blijkt dat een geheel getal is.  
Laten we dit getal noemen; dan , dus .   
Er bestaat juist dan een keerpunt voor als er gehele getallen en bestaan zodanig dat . (7)  
De vraag is welke gehele getallen hieraan voldoen.  
We gebruiken nu het volgende bekende resultaat uit de elementaire getaltheorie  
(dat we hier niet zullen bewijzen) .  
 als en gehele getallen zijn met ggd, dan is elk geheel getal   
 te schrijven in de vorm voor zekere gehele getallen en . (8)  
We onderscheiden nu twee gevallen.  
**A)** en zijn beide oneven. Dan is het rechterlid van de betrekking in (7) altijd even, dus kan geen enkel oneven getal in de vorm geschreven worden. Neem nu een willekeurig even getal ( geheel). Er bestaan volgens (8)   
gehele getallen en zodanig . Dit geeft:  
 en dit is van de vorm gegeven door (7) omdat   
 en oneven getallen zijn.   
Elk even getal is daarom te schrijven in de vorm gegeven door (7).   
Voor geldt dat . Hierbij is een willekeurig geheel getal.   
**B)** Precies één van de getallen en is even. Dan is het rechterlid van de betrekking in (7) altijd oneven dus kan geen enkel even getal in de vorm geschreven worden. Neem nu een willekeurig oneven getal . Volgens (8) bestaan er gehele getallen en zodanig . Er zijn 4 subgevallen:  
**B)1**  is even (dus en zijn oneven) en is oneven;  
**B)2**  is even (dus en zijn oneven) en is even;  
**B)3**  is even (dus en zijn oneven) en is oneven;  
**B)4**  is even (dus en zijn oneven) en is even.  
In de gevallen **B)1** en **B)3** is een schrijfwijze van in de vorm (7);  
In de gevallen **B)2** en **B)4** is een schrijfwijze van in de vorm (7). Hiermee is aangetoond dat elk oneven getal te schrijven is in de vorm (7).  
Deze analyses leiden tot het volgende resultaat.  
  
  
**Stelling 6**  
Laat de kromme beschreven worden door .  
I) Als en beide oneven zijn, dan geldt:   
 heeft een keerpunt ⟺ voor een zeker geheel getal .   
II) Als precies één van de getallen en even is, dan geldt:  
 heeft een keerpunt ⟺ voor een zeker oneven getal .   
  
Vervolgens onderzoeken we het aantal en de locatie van de keerpunten van de kromme beschreven worden door . Aangenomen wordt dat een keerpunt heeft.   
Eerst bekijken we het geval dat en beide oneven zijn. Volgens stelling 6 geldt dan dat voor een zeker geheel getal . We kunnen stellen en voor zekere gehele getallen en , waarbij en .   
Verder nemen we voor *ε* en *σ* getallen die elk gelijk zijn aan 1 of .   
Met behulp van stelling 3a vinden we:  
 is een keerpunt van   
⟺ er zijn gehele getallen en zodanig dat   
⟺ er zijn gehele getallen en zodanig dat   
 (9)  
Uit (9) volgt direct dat voor een zeker geheel getal , dus  
 voor een zeker geheel getal ( is even!).   
Dit is ook zo uit te drukken dat de getallen en dezelfde **pariteit** hebben, d.w.z. dat ze beide even of beide oneven zijn. Omgekeerd stel dat en dezelfde pariteit hebben. Dan volgt dat er een geheel getal bestaat zodanig dat , dus  
. We willen nagaan of er gehele getallen en bestaan zodanig dat (9) geldt.  
Dan zou moeten gelden dat , oftewel . Volgens (8) bestaan er inderdaad gehele getallen en waarvoor dit geldt. Dit betekent dat een keerpunt is van . Het criterium en hebben dezelfde pariteit werken we nog verder uit. Neem eerst aan dat en dezelfde rest hebben bij deling door 4, d.w.z. . Dan . Hiermee vinden we:  
 is een keerpunt van   
⟺ ( is even en ) of ( is oneven en .  
Vervolgens nemen we aan dat en een ongelijke rest hebben bij deling door 4,   
d.w.z. . Dan . Dit geeft:  
 is een keerpunt van   
⟺ ( is even en ) of ( is oneven en . We merken op dat uit deze beschouwingen volgt dat er in alle gevallen precies twee keerpunten zijn die gespiegeld liggen t.o.v. de oorsprong. Immers als , dan zijn de keerpunten en , en als dan zijn ze en . Hiermee is het volgende resultaat gevonden.  
**Stelling 7**  
Laat de kromme beschreven worden door ,  
waarbij en beide oneven zijn. We nemen aan dat een keerpunt heeft, dus   
 voor een zeker geheel getal . Dan is voldaan aan:  
A) als en dezelfde rest hebben bij deling door 4, dan geldt  
 is een keerpunt ⟺ ( is even en ) of ( is oneven en ;   
B) als en een ongelijke rest hebben bij deling door 4, dan geldt:  
 is een keerpunt ⟺ ( is even en ) of ( is oneven en ;  
C) heeft precies twee keerpunten die gespiegeld liggen t.o.v. de oorsprong.  
  
Voorbeeld van geval A) van stelling 7:

|  |  |
| --- | --- |
| Lissajous (5a).png | Lissajous (5b).png |

Voorbeeld van geval B) van stelling 7

|  |  |
| --- | --- |
| Lissajous (5c).png | Lissajous (5d).png |

Dan moeten we nu het geval analyseren dat precies één van de getallen en even is,  
waarbij we aannemen dat een keerpunt heeft. Volgens stelling 6 geldt dan dat  
 voor een zeker oneven getal . Stel waarbij en geheel is.   
Verder stellen we en , waarbij ,   
en . Voor *ε* en *σ* nemen we weer getallen die elk gelijk zijn aan 1 of .  
Toepassen van stelling 3a geeft:  
 is een keerpunt van   
⟺ er zijn gehele getallen en zodanig dat   
⟺ er zijn gehele getallen en zodanig dat   
. (10)   
Stel dat aan (10) voldaan is. Dan volgt direct dat voor een zeker geheel getal .   
  
Omgekeerd stel dat geldt voor een zeker geheel getal .  
We willen nagaan of dan aan (10) voldaan is. Er zou dan moeten gelden dat  
,   
voor zekere gehele getallen en . De betrekking is te herschrijven tot  
 , dus .  
Volgens (8) bestaan er inderdaad gehele getallen en waarvoor dit zo is.  
Hiermee is aangetoond dat (10) gelijkwaardig is aan:   
er bestaat een geheel getal zodanig dat . (11)  
Dit criterium werken we nog verder uit.  
Evident is dat , voor alle mogelijke waarden van .  
Dit impliceert dat gelijk moet zijn aan Er zijn daarom drie mogelijkheden.  
**1)** ;  
**2)** ;  
**3)** .  
In totaal zijn er 32 oplossingen die hieraan voldoen. Ze zijn weergegeven in tabel 1 op de volgende pagina. We zien dat er bij elke gegeven waarden van er precies twee keerpunten zijn. Bovendien zijn de twee keerpunten altijd elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in een van de coördinaatassen, dus ze zijn nooit elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de oorsprong. We gebruiken nu volgende notatie:  
 voor het keerpunt (linksonder) ; voor het keerpunt (linksboven) ;  
 voor het keerpunt (rechtsonder) ; voor het keerpunt (rechtsboven).  
Met bijvoorbeeld de notatie bedoelen we dan dat de keerpunten linksonder en linksboven gelegen zijn, dus dat het de keerpunten en zijn .  
Hiermee kunnen we tabel 1 reduceren tot tabel 2 die wat overzichtelijker is.  
Merk op dat elk van de types , , , precies vier keer voorkomt.  
De conclusie van deze analyses staat onder tabel 2.

**tabel 1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***i*** | ***j*** | ***τ*** | ***ε*** | ***σ*** |  | ***i*** | ***j*** | ***τ*** | ***ε*** | ***σ*** |
| 0 | 1 | 1 |  |  |  | 2 | 1 |  |  |  |
| 0 | 1 | 1 |  |  |  | 2 | 1 |  |  |  |
| 0 | 1 |  |  |  |  | 2 | 1 |  |  |  |
| 0 | 1 |  |  | 1 |  | 2 | 1 |  |  |  |
| 0 | 3 |  |  |  |  | 2 | 3 | 1 |  |  |
| 0 | 3 |  |  |  |  | 2 | 3 | 1 |  |  |
| 0 | 3 |  |  |  |  | 2 | 3 |  |  |  |
| 0 | 3 |  |  | 1 |  | 2 | 3 |  |  | 1 |
| 1 | 0 |  |  |  |  | 3 | 0 | 1 |  |  |
| 1 | 0 | 1 |  |  |  | 3 | 0 |  |  |  |
| 1 | 0 |  |  |  |  | 3 | 0 |  |  | 1 |
| 1 | 0 |  |  |  |  | 3 | 0 |  |  | 1 |
| 1 | 2 | 1 |  |  |  | 3 | 2 |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  |  | 3 | 2 | 1 |  |  |
| 1 | 2 |  |  | 1 |  | 3 | 2 |  |  |  |
| 1 | 2 |  |  | 1 |  | 3 | 2 |  |  |  |

**tabel 2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***i*** | ***j*** | ***τ*** | **type** |  | ***i*** | ***j*** | ***τ*** | **type** |
| 0 | 1 | 1 |  |  | 2 | 1 |  |  |
| 0 | 1 |  |  |  | 2 | 1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 3 |  |  |  | 2 | 3 | 1 |  |
| 0 | 3 |  |  |  | 2 | 3 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 |  |  |  | 3 | 0 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |  |  | 3 | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 1 |  |  | 3 | 2 |  |  |
| 1 | 2 |  |  |  | 3 | 2 |  |  |

**Stelling 8**  
Laat de kromme beschreven worden door ,  
waarbij precies één van de getallen en even is. We nemen aan dat een keerpunt heeft, dus voor een zeker oneven getal . Laat waarbij en geheel is.  
Stel en , waarbij , en .   
Dan heeft in de 16 gevallen die staan in tabel 2 (en niet in andere gevallen) een keerpunt. Bovendien zijn er in elk van die gevallen precies twee keerpunten die elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in een van de coördinaatassen.  
  
We illustreren elk van de 16 gevallen van tabel 2 met een voorbeeld, waarbij we steeds  
 nemen. Dit laatste is irrelevant voor het globale karakter van de kromme.

|  |  |
| --- | --- |
| Lissajous (6a).png | Lissajous (6b).png |
| Lissajous (6c).png | Lissajous (6d).png |
| Lissajous (6e).png | Lissajous (6f).png |
| Lissajous (6g).png | Lissajous (6h).png |

|  |  |
| --- | --- |
| Lissajous (6i).png | Lissajous (6j).png |
| Lissajous (6k).png | Lissajous (6l).png |

|  |  |
| --- | --- |
| Lissajous (6p).png | Lissajous (6o).png |
| Lissajous (6m).png | Lissajous (6n).png |