**Overzicht bewijzen in de meetkunde  
  
Inhoudsopgave**

|  |  |
| --- | --- |
| **Onderwerp** | **Pagina** |
| Meetkundige definities | 2 |
| Gelijkvormigheid en congruentie | 3 - 4 |
| Z-hoeken en F-hoeken | 5 |
| Hoekensom | 6 |
| Buitenhoek driehoek | 7 |
| Gelijkbenige driehoek | 8 |
| Middenparallel | 9 |
| De drie bissectrices van een driehoek gaan door één punt | 10 |
| De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt | 11 |
| De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt | 12 |
| De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt | 13 - 14 |
| Vierhoeken en hun onderlinge relaties | 15 - 19 |
| Cirkelstellingen | 20 - 23 |
| De stelling van Thales en de omkering | 24 |
| Omtrekshoek en middelpuntshoek | 25 |
| Overstaande hoeken koordenvierhoek | 26 - 28 |
| Constantehoek-stelling | 29 – 30 |
| Raaklijn en voerstraal | 31 |
| Hoek tussen een raaklijn en een koorde in een cirkel | 32 |
| Gelijke raaklijnstukken | 33 |
| Loodlijn op koorde | 34 |
| Machtstelling | 35 - 36 |
| Booghoeken | 37 - 39 |
| Omgeschreven cirkel | 40 |
| Ingeschreven cirkel | 41 |
| Aangeschreven cirkel | 42 |
| Antiparallel | 43 |
| Driehoeksongelijkheid | 44 |
| Bissectricestelling | 45 - 46 |
| Punt van Fermat | 47 - 48 |

**Meetkundige definities**Een **scherpe hoek** is een hoek van minder dan 90 graden.  
Een **rechte hoek** is een hoek van 90 graden.  
Een **stompe hoek** is een hoek die groter is dan 90 graden en kleiner dan 180 graden.  
Een **gestrekte hoek** is een hoek van 180 graden.  
De **middelloodlijn** van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor deelt.  
Een **gelijkbenige driehoek** is een driehoek met twee gelijke zijden.  
Een **gelijkzijdige driehoek** is een driehoek met drie gelijke zijden.  
Een **rechthoekige driehoek** is een driehoek met een rechte hoek.  
Een **scherphoekige driehoek** is een driehoek waarvan alle hoeken kleiner dan 90 graden zijn.  
Een **stomphoekige driehoek** is een driehoek met een hoek van meer dan 90 graden.  
Een **deellijn** **(bissectrice)** van een hoek is een lijn die de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt.  
Een **zwaartelijn** in een driehoek is een lijn die gaat door een hoekpunt en door het midden van de overstaande zijde.  
Een **hoogtelijn** in een driehoek is een lijn die gaat door een hoekpunt en loodrecht staat op de overstaande zijde.  
Een **middenparallel** in een driehoek is een lijnstuk dat de middens van twee zijden van die driehoek met elkaar verbindt.  
Een **vierkant** is een vierhoek met vier rechte hoeken en vier gelijke zijden.  
Een **rechthoek** is een vierhoek met vier rechte hoeken.  
Een **parallellogram** is een vierhoek waarvan de overstaande zijden parallel zijn.  
Een **ruit** is een vierhoek met vier gelijke zijden.  
Een **trapezium** is een vierhoek waarvan twee overstaande zijden evenwijdig zijn.  
Een **cirkel** met middelpunt en straal is de verzameling van punten die op afstand van liggen.  
Een **raaklijn** aan een cirkel is een lijn die precies één punt gemeen heeft met die cirkel.  
Een **koorde** in een cirkel is een lijnstuk waarvan de eindpunten op de cirkel liggen.  
Een **middellijn** **(diameter)** van een cirkel is een koorde die door het middelpunt van de cirkel gaat.  
Een **middelpuntshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van de cirkel is.  
Een **omtrekshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen de cirkel snijden.  
Een **koordenvierhoek** is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.  
Een **omgeschreven cirkel** is een cirkel door de hoekpunten van die driehoek.  
Een **ingeschreven cirkel** is een cirkel die raakt aan de zijden van die driehoek.  
Een **aangeschreven cirkel** van een driehoek is een cirkel die (uitwendig) raakt aan een zijde en aan de verlengingen van de twee andere zijden.  
  
**Gelijkvormigheid en congruentie  
A) Gelijkvormigheidskenmerken**Twee driehoeken en heten **gelijkvormig** als er een vergroting is (met een bepaalde factor ) waarbij het beeld is van .  
Informeel uitgedrukt: twee driehoeken zijn gelijkvormig als de ene driehoek een vergrote of verkleinde kopie is van de andere driehoek.  
  
Twee driehoeken en zijn gelijkvormig, notatie , als ze gelijk hebben:

|  |  |
| --- | --- |
| twee paren hoeken (**hh**)  Gelijkvormigheid (2).png  en | een paar hoeken en de verhouding van de  omliggende zijden (**zhz**) Gelijkvormigheid (2).png  en |

|  |  |
| --- | --- |
| de verhouding van de zijden (**zzz**)  Gelijkvormigheid (3).png | een paar rechte hoeken en de verhouding  van twee niet-omliggende zijden (**zzr**)  Gelijkvormigheid (4).png  en |

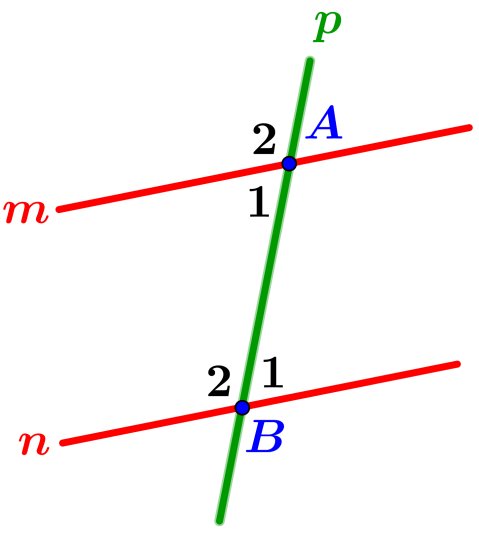
**Opmerking**Het vaakst wordt het kenmerk **hh** toegepast. Soms moet je het kenmerk **zhz** gebruiken.

**B) Congruentiekenmerken**Twee driehoeken en heten **congruent** als ze dezelfde vorm en dezelfde grootte hebben.   
Informeel uitgedrukt: twee driehoeken zijn congruent als de ene driehoek na eventueel verschuiven, roteren of omklappen precies op de andere driehoek past.  
Twee driehoeken en zijn congruent, notatie , als ze gelijk hebben:

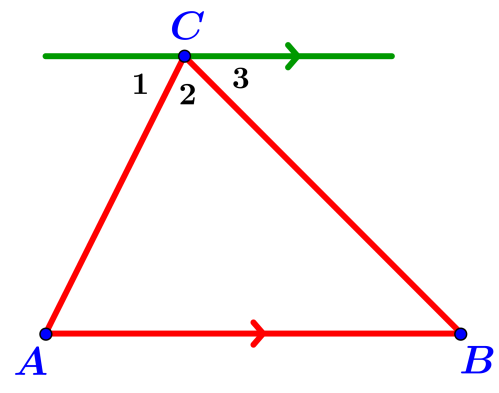
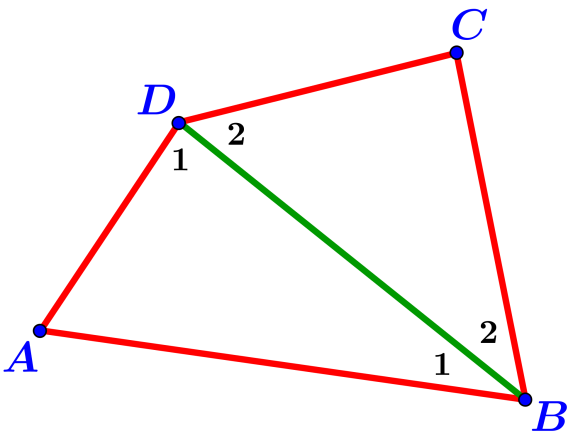
|  |  |
| --- | --- |
| twee zijden en de ingesloten hoek (**ZHZ**) congruentie (1).png  en | een zijde en twee aanliggende hoeken (**HZH**) congruentie (2).png  en |

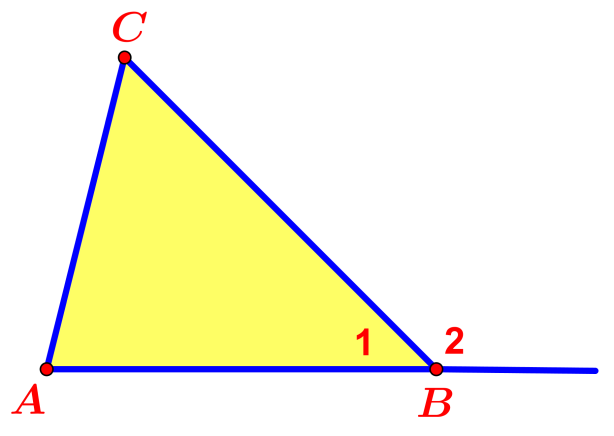
|  |  |
| --- | --- |
| een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek **(ZHH) congruentie (3).png**  en | drie zijden (**ZZZ**)  congruentie (4).png , en |

|  |
| --- |
| twee zijden en een rechte hoek tegenover  een van die zijden **(ZZR)** congruentie (5).png , en |

**Z-hoeken en F-hoeken**Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan treden er gelijke Z-hoeken en F-hoeken op.  
  
  
**figuur 1**  
  
**Eigenschap 1**  
Als in figuur 1 de lijnen en evenwijdig zijn, dan geldt dat  
 (gelijke Z-hoeken) en (gelijke F-hoeken).  
  
Deze eigenschap heeft ook twee omkeringen.  
  
**Eigenschap 2**  
Als in figuur 1 geldt dat , dan zijn en evenwijdig  
 (omkering Z-hoeken).  
  
**Eigenschap 3**  
Als in figuur 1 geldt dat , dan zijn en evenwijdig  
(omkering F-hoeken).  
  
Eigenschap 1 wordt vaak toegepast in figuren waarin evenwijdige lijnen voorkomen.  
De eigenschappen 2 en 3 worden toegepast om te bewijzen dat bepaalde lijnen evenwijdig zijn.

**Hoekensom  
  
Stelling 1**In elkedriehoek is de som van de hoeken gelijk aan 180 graden.  
**Bewijs**Gegeven is een willekeurige driehoek .

Trek door hoekpunt de lijn evenwijdig aan lijn .  
Dit geeft de drie aangegeven hoeken bij . Er geldt:  
 en (Z-hoeken). Hieruit volgt:  
 (gestrekte hoek bij ).  
  
**Stelling 2**  
 In elkevierhoek is de som van de hoeken gelijk aan 360 graden.  
**Bewijs**  
Gegeven is een willekeurige vierhoek .  
  
Trek diagonaal . Toepassen van stelling 1 geeft:  
 en . Optellen van deze betrekkingen geeft:  
 , oftewel .  
  
Algemeen kan men eenvoudig aantonen:  
de som van de hoeken van een hoek is gelijk aan .

**Buitenhoek driehoek**Zie de onderstaande figuur.  
  
  
 heet een **buitenhoek** van . Er geldt de volgende eigenschap.  
  
**Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.**Het bewijs is zeer simpel. We moeten in de bovenstaande figuur aantonen dat   
 . Er geldt:  
 (hoekensom )  
 en ook  
 (gestrekte hoek)  
en hieruit volgt direct dat .  
  
We vermelden een gevolg van de bovengenoemde eigenschap.  
  
**Een buitenhoek van een driehoek is groter dan elk van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.**Immers uit volgt:  
 (omdat ) en (omdat ).

**Gelijkbenige driehoek**

|  |  |
| --- | --- |
| Een **gelijkbenige driehoek** is een driehoek met twee gelijke zijden. Zie de figuur hiernaast. De twee gelijke zijden en worden de **benen** van genoemd.  Zijde is de **basis**. De hoeken bij en heten de **basishoeken** en de hoek bij is de **tophoek**. | gelijkbenige driehoek (1).png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 1** Bij een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk. **Bewijs** Laat gelijkbenig zijn met . Trek het lijnstuk van naar het midden van zijde . Dan geldt dat (ZZZ) en dit impliceert dat . De basishoeken van zijn daarom gelijk. | gelijkbenige driehoek (2).png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 2** Als in geldt dat , dan volgt dat . **Bewijs** Trek de hoogtelijn uit hoekpunt . Er geldt dat (ZHH) en dit impliceert dat  . | gelijkbenige driehoek (3).png |

**Middenparallel**

|  |  |
| --- | --- |
| Een **middenparallel** in een driehoek is een lijnstuk dat de middens van twee zijden van die driehoek met elkaar verbindt. In de figuur hiernaast is een middenparallel in .  **Stelling 1** Een middenparallel is evenwijdig aan de derde zijde en heeft een lengte die de helft is van de lengte van die derde zijde. | Middenparallel (1).png |

**Bewijs**In defiguur hierboven moeten we dus aantonen dat en .  
Er geldt dat en (\*). Hieruit volgt dat (zhz).   
Vanwege (\*) geldt dan dat , dus . Verder impliceert de gelijkvormigheid van dat . Hieruit volgt dat (omkering F-hoeken).Deze eigenschap kan bijvoorbeeld gebruikt worden om aan te tonen dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.  
  
Een andere simpele toepassing is het volgende resultaat.

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 2 (van Varignon)** Bij een willekeurige vierhoek vormen de middelpunten van de zijden de hoekpunten van een parallellogram. | **Varignon (1).png** |
| **Bewijs**  en zijn de middelpunten van de zijden van vierhoek . Trek de diagonalen en .  is een middenparallel in en is een middenparallel in . Er volgt m.b.v. stelling 1 dat en , dus  . Analoog blijkt dat en , dus . Vierhoek is daarom een parallellogram. | **Varignon (2).png** |

**De drie bissectrices van een driehoek gaan door één punt**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Een **bissectrice** (of **deellijn**) van een hoek is de halve lijn (met als beginpunt het hoekpunt) die de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt. In de figuur hiernaast is de bissectrice van . | bissectrices concurrent (1).png | |
| **Eigenschap 1** Elk punt van de bissectrice van heeft gelijke afstanden tot de benen van . **Bewijs** Laat en de loodrechte projecties van op de benen van zijn, waarbij ligt op de bissectrice van .  Er geldt: , (bissectrice) en . Dit impliceert dat (ZHH. | | bissectrices concurrent (2).png |
| Het gevolg is dat , dus heeft gelijke afstanden tot de benen van de hoek. | | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Eigenschap 2 (omkering van eigenschap 1)** Een punt dat gelijke afstanden heeft tot de benen van ligt op de bissectrice van  **Bewijs** Laat en de loodrechte projecties van op de benen van zijn. Er geldt: , (gegeven) en  .  Dit impliceert dat (ZZR | bissectrices concurrent (3).png |
| Het gevolg is dat , dus ligt op de bissectrice van . | |

**Eigenschap 3**De drie bissectrices van een driehoek gaan door één punt.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs**  Laat in de bissectrices van en elkaar snijden in het punt . Eigenschap 1 leert dat en ( distance afstand). Er volgt dat en dit betekent volgens eigenschap 2 dat op de bissectrice van ligt. De drie bissectrices van gaan daarom door één punt. | bissectrices concurrent (4).png |
| Het snijpunt van de drie bissectrices van een driehoek is het middelpunt van de  **ingeschreven cirkel** van die driehoek. | |

**De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt**Een **middelloodlijn** van een lijnstuk is een lijn die loodrecht staat op en gaat door het midden van . Deze middelloodlijn zullen aangeven met .

|  |  |
| --- | --- |
| **Eigenschap 1** Elk punt van heeft gelijke afstanden tot en . **Bewijs** Neem een willekeurig punt van . Als op lijn ligt, dan is het midden van , dus heeft zeker gelijke afstanden tot en . Neem nu aan niet op lijn ligt. Trek de lijnstukken en . Noem het midden van lijnstuk . Er geldt dat: , en . Dit impliceert dat (ZHZ).  Het gevolg is dat . | middelloodlijnen concurrent (1).png |

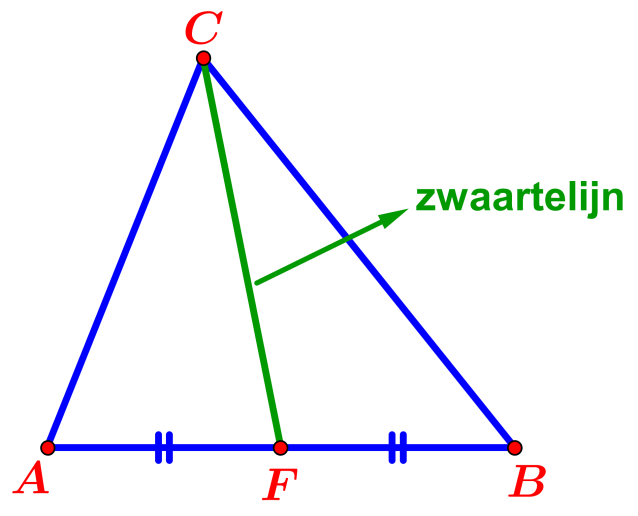
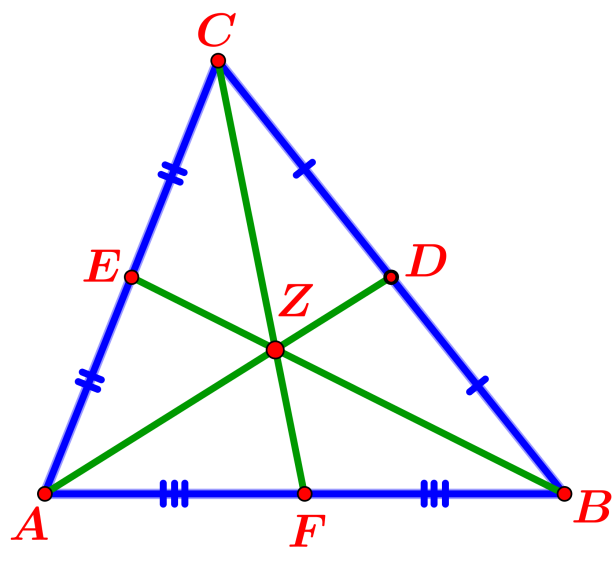
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Eigenschap 2** (omkering van eigenschap 1) Een punt dat gelijke afstanden heeft tot de punten en ligt op de middelloodlijn van lijnstuk . **Bewijs** Als op lijn ligt, dan moet het midden van lijnstuk zijn en dit punt ligt zeker op de middelloodlijn van lijnstuk . Neem nu aan dat niet op lijn ligt. Trek door de lijn die door het midden van lijnstuk gaat. Er geldt: (gegeven) , | | middelloodlijnen concurrent (2).png |
| en ( is het midden van ). Dit impliceert dat (ZZZ). Het gevolg is dat . Beide hoeken zijn samen gelijk aan 180° (gestrekte hoek), dus  . Lijn is derhalve de middelloodlijn van lijnstuk en ligt op deze lijn.  **Eigenschap 3** De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt. | | |
| **Bewijs** Noem het snijpunt van en . Toepassen van eigenschap 1 geeft (want ligt op ) en (want ligt op ). Er volgt dat , zodat volgens eigenschap 2 punt ook op ligt.  Hiermee is de eigenschap bewezen.  Het snijpunt van de drie middelloodlijnen van is het middelpunt van de **omgeschreven cirkel** van die driehoek. | middelloodlijnen concurrent (3).png | | |

**De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Een **hoogtelijn** in een driehoek is een lijn die gaat door een hoekpunt en loodrecht staat op de tegenoverliggende zijde. Als men de drie hoogtelijnen in een driehoek tekent, dan blijken die door één punt te gaan. Dit punt het **hoogtepunt** van de driehoek. Het hoogtepunt kan ook buiten de driehoek liggen. Dit is het geval als de driehoek stomphoekig is. Zie de twee onderstaande figuren. | | hoogtelijnen concurrent (0).png |
| hoogtelijnen concurrent (1).png | hoogtelijnen concurrent (3).png | |

**Stelling**De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Gegeven is ∆. Trek door de lijn evenwijdig aan , door de lijn evenwijdig aan en door de lijn evenwijdig aan . Deze drie lijnen snijden elkaar in de punten en .  De drie vierhoeken en zijn parallellogrammen (evenwijdige overstaande zijden). Hieruit volgt dat   en . De hoogtelijn in ∆ staat loodrecht op dus ook op .  Tevens is het midden van . | **hoogtelijnen concurrent (2).png** |
| Dit leert dat de middelloodlijn is van het lijnstuk . Analoog blijkt dat middelloodlijn is van het lijnstuk en dat middelloodlijn is van het lijnstuk . De drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek gaan door één punt (bekende eigenschap van middelloodlijnen), dus gaan ook de hoogtelijnen van ∆ door één punt. | |

**De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt**Een **zwaartelijn** in een driehoek is een lijn die een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde.  
  
  
Het blijkt altijd zo te zijn dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan, het zogenaamde **zwaartepunt** van de driehoek.   
  
  
Bovendien kan aangetoond worden dat .  
  
De driehoek wordt door de drie zwaartelijnen verdeeld in zes driehoeken met dezelfde oppervlakte.

**Stelling**  
De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.   
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in de verhouding 2 : 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Zie eerst de figuur hiernaast  Laat en elkaar snijden in punt . Lijnstuk is een middenparallel in , dus is evenwijdig met en (eigenschap middenparallel).  Er volgt dat en (Z-hoeken). Dit geeft: (hh).  Bovendien geldt (omdat ) :  **(1)**. | **zwaartelijnen concurrent (3).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| Zie vervolgens de figuur hiernaast. Laat en elkaar snijden in punt . Lijnstuk is een middenparallel in , dus is evenwijdig met en (eigenschap middenparallel).  Er volgt dat en (hoeken). Dit geeft: (hh).  Bovendien geldt (omdat ) :   **(2)**. | zwaartelijnen concurrent (4).png |

Volgens **(1)** en **(2)** wordt door zowel als in de verhouding verdeeld.  
Hieruit volgt dat , dus moeten en samenvallen.  
Dit impliceert dat en door één punt gaan.   
Uit het bewijs blijkt bovendien dat .

**Vierhoeken en hun onderlinge relaties**Bij bewijzen in dit document maken we gebruik van sommige van de gelijkvormigheidskenmerken hh, zhz, zzz, zzr en de congruentiekenmerken ZHZ, HZH, ZHH, ZZZ, ZZR.  
Zie zo nodig het document ‘Gelijkvormigheid en congruentie’.  
Met ZH bedoelen we dat we Z-hoeken gebruiken bij evenwijdige lijnen en met OZH de omkering hiervan: wanneer twee lijnen door een derde gesneden worden en er gelijke Z-hoeken ontstaan, dan zijn die twee lijnen onderling evenwijdig.  
Evenzo noteren FH en OFH voor de analoge situaties bij F-hoeken.

|  |  |
| --- | --- |
| **Vierkant** Eenvierkant iseen vierhoek metvier  gelijkezijden en vier rechte hoeken. | vierkant (1).png |
| **Rechthoek** Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken. | **rechthoek (1).png** |

**Stelling 1**Ineen rechthoek zijn de diagonalen even lang.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Er gelden de volgende betrekkingen:  (hoekensom in ) en   , dus . Analoog blijkt dat . Er volgt dat  (HZH), dus en . Dit impliceert dat (ZHZ), dus . | **rechthoek (2).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Parallellogram** Een parallellogram is een vierhoek waarvan de  overstaande zijden parallel (evenwijdig) zijn. | **parallellogram (1).png** |

**Stelling 2**Een parallellogram heeft de volgende eigenschappen:  
a) de overstaande zijden zijn even lang ;  
b) de diagonalen delen elkaar middendoor ;  
c) de overstaande hoeken zijn gelijk ;  
d) twee aanliggende hoeken zijn samen .

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Gegeven is het parallellogram waarvan de diagonalen elkaar snijden in het punt . a): Er geldt: en (Z-hoeken).   Dit geeft dat (HZH), dus  en . | **parallellogram (2).png** |
| b): , en (zie a) ), dus (HZH). Er volgt dat  en . en delen elkaar daarom middendoor. | |
| c)**:** We weten reeds dat en , dus ,  oftewel . Analoog blijkt dat . d): Er geldt: (hoekensom vierhoek), waaruit m.b.v. c) volgt dat  , dus . Analoog voor de overige aanliggende hoeken. | |

**Stelling 3**Een vierhoek waarvan twee overstaande zijden gelijke lengte hebben en evenwijdig zijn, is een parallellogram.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** We nemen aan dat in vierhoek geldt dat  en . Dan (ZH), dus  (ZHZ). Er volgt dat , dus (OZH).  Vierhoek is derhalve een parallellogram. | **parallellogram (3).png** |

**Stelling 4**Een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar middendoor delen is een parallellogram.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** De diagonalen van vierhoek snijden elkaar in , waarbij en . Er geldt dat (overstaande hoeken) en hieruit volgt dat  (ZHZ). Dit impliceert dat , dus (omkering Z-hoeken). Analoog blijkt dat . Vierhoek is daarom een parallellogram. | parallellogram (4).png |

**Stelling 5**Eenvierhoek waarvan de overstaande hoeken gelijk zijn is een parallellogram.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Stel dat voor vierhoek geldt: en . Er volgt dat (hoekensom vierhoek), dus . Ook geldt dat (gestrekte hoek bij ), dus . Hieruit volgt dat (Omkering F-hoeken). Analoog blijkt (door lijnstuk te verlengen) dat .  is daarom een parallellogram. | **parallellogram (5).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ruit** Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden. | **ruit (1a).png** |

**Stelling 6**In een ruitgelden de volgendeeigenschappen:  
a) de diagonalen delen de hoeken middendoor ;  
b) de diagonalen staan loodrecht op elkaar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** a): (ZZZ). Omdat beide driehoeken   bovendien gelijkbenig zijn, volgt er dat  .   Analoog blijkt:  . | **ruit (2).png** |
| b): Er geldt (hoekensom vierhoek), dus ,   oftewel . Dit impliceert: (hoekensom )  , dus staat loodrecht op . | |

**Stelling 7**Een vierhoek waarvan de diagonalen de hoeken middendoor delen is een ruit.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Gegeven is vierhoek waarvan de diagonalen de hoeken middendoor delen. Er geldt dat  (HZH), dus en . (1)  Ook geldt dat (HZH), dus . (2)  Uit (1) en (2) volgt dat , dus  is een ruit. | **ruit (3).png** |

**Stelling 8** even lang zijn is een rechthoek.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Laat een parallellogram zijn waarvoor . Er geldt : (ZZZ), want een parallellogram heeft gelijke overstaande zijden en hier geldt dat . Dit geeft dat . Omdat twee aanliggende hoeken bij een parallellogram samen zijn, volgt dat .De eigenschap dat bij een parallellogram de overstaande hoeken gelijk zijn, impliceert dan dat een rechthoek is. | parallellogram (6).png |

**Stelling 9** loodrecht op elkaar staan is een ruit.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Laat een parallellogram zijn waarvoor .  is het snijpunt van de diagonalen. Er geldt dat , omdat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor delen. Dit geeft: (ZHZ), dus . Omdat de overstaande zijden van een parallellogram gelijk zijn, volgt uit dat een ruit is. | parallellogram (7).png |

**Stelling 10**Een parallellogram waarvan een van de diagonalen een van de hoeken middendoor deelt is een ruit.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Laat een parallellogram zijn waarvan de diagonaal de hoek bij middendoor deelt.   (gegeven) (ZH), dus (gelijke basishoeken). Omdat de overstaande zijden van een parallellogram gelijk zijn, volgt uit dat een ruit is. | **parallellogram (8).png** |

**Stelling 11**Elke rechthoek is een parallellogram.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Gegeven is de rechthoek . Verleng aan de kant van en aan de kant van . Er geldt  (gestrekte hoek bij ) en   (gestrekte hoek bij ).  (OFH) en  (OFH) . Rechthoek is derhalve een parallellogram. | rechthoek (3).png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 12** Elke ruit is een parallellogram. Bewijs Getekend is de ruit met zijn diagonalen. Er geldt:  (ZZZ). Dit geeft: , dus en , dus . Ruit is derhalve een parallellogram. | **ruit (4).png** |

**Cirkelstellingen (bewijzen verderop in dit document)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling van Thales** Op de cirkel met middelpunt liggen de punten, en , waarbij een middellijn is. Dan geldt:  **.** | **Thales (1).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Omkering van de stelling van Thales** Als ∆ rechthoekig is met de rechte hoek in *,* dan ligt op de cirkel met als diameter. | **Thales (3).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Omtrekshoek en middelpuntshoek** Neem drie punten op een cirkel met  middelpunt . We noemen een **omtrekshoek**. De cirkelboog tussen en waar niet op ligt bepaalt de een de **middelpuntshoek** . Er geldt: . | mpthoekenomtrhoek (1).png |
| **Koordenvierhoek-eigenschap** Stel dat een koordenvierhoek is. Dan zijn overstaande hoeken samen , dus   **en**  . | **overstaande hoeken koordenvierhoek (0).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Omkering koordenvierhoek-eigenschap** Als en vierhoek is zodanig dat  , dan is en koordenvierhoek, d.w.z. de punten en liggen op één cirkel. | **overstaande hoeken koordenvierhoek (0a).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Variant van de koordenvierhoek-eigenschap** Stel dat een koordenvierhoek is. Dan is de binnenhoek bij gelijk aan de overstaande buitenhoek bij , dus **.** | **overstaande hoeken koordenvierhoek (0b).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Variant van de omkering van de koordenvierhoek-eigenschap** Als een vierhoek is waarvan de binnenhoek bij gelijk is aan de overstaande buitenhoek bij , dan is een koordenvierhoek, d.w.z. de punten en liggen op één cirkel. | **overstaande hoeken koordenvierhoek (0d).png** |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Constantehoek-stelling** Neem een cirkel met daarop twee vaste punten en . Deze twee punten verdelen de cirkel in twee cirkelbogen. Kies twee willekeurige punten en op een van deze twee bogen. Dan geldt:  Anders uitgedrukt heeft een vaste (constante) waarde als beweegt langs een van de cirkelbogen, bepaald door de punten en . | **constantehoek-stelling (2a).png** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Omkering constantehoek-stelling** Als de punten en aan dezelfde kant van lijn liggen en er voldaan is aan dan liggen de punten op één cirkel. | **constantehoek-stelling (2b).png** | |
|  | |  | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Omkering van de stelling over de omtrekshoek en** **de** **middelpuntshoek** Laat een van de hoeken bij zijn van het gebroken lijnstuk , waarbij en punt buiten deze hoek liggen. Neem aan dat . Dan ligt op de cirkel met middelpunt en straal . | **mpthoekenomtrhoek (1a).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Raaklijn loodrecht op voerstraal** Stel dat lijn een cirkel met middelpunt raakt in punt .  heet dan de voerstraal naar het raakpunt. Dan geldt: staat loodrecht .  **Omkering eigenschap** **raaklijn loodrecht op voerstraal.** Stel dat lijn een cirkel met middelpunt snijdt in punt , zodanig dat . Dan raakt aan de cirkel. | **raaklijnenstraal (1a).png** |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Hoek tussen raaklijn en koorde** Lijn raakt aan een cirkel in punt .   is een koorde in . Verder is een willekeurig punt op zodanig dat niet stomp is. Dan geldt: . | | | **hoek tussen raaklijn en koorde (1).png** | |
| **Gelijke raaklijnstukken** Vanuit punt buiten cirkel worden twee raaklijnen aan getrokken. De twee raakpunten zijn en . Dan geldt: . | **gelijke raaklijnstukken (1).png** | | | |
| **Loodlijn op koorde** In de cirkel met middelpunt is een koorde.  staat loodrecht op , waarbij op ligt. Dan geldt: **.** | | **loodlijn op koorde.png** | |

**Machtstelling**Laat en twee koorden zijn in een cirkel die elkaar (zo nodig na verlengen) snijden in   
punt . Dan geldt: .

|  |  |
| --- | --- |
| machtstelling (1).png | machtstelling (3).png |

**De stelling van Thales en de omkering**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S**telling van Thales**:  Zie de nevenstaande figuur. Op de cirkel met middelpunt liggen de punten, en , waarbij een diameter is. Dan geldt: **∠** . | | Thales (1).png |
| **Bewijs** Trek lijnstuk .  De driehoeken en zijn beide gelijkbenig (want straal cirkel) dus hebben gelijke basishoeken. In de figuur geldt  (hoekensom driehoek) , dus , . Dit betekent dat . | Thales (2).png | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Omkering van de stelling van Thales** Als ∆ rechthoekig is met de rechte hoek in *,* dan liggen de punten op de cirkel met als diameter. | **Thales (3).png** | |
| **Bewijs** Trek door een lijn loodrecht op en door de lijn loodrecht op . Deze snijden elkaar in een punt.  Merk op dat een rechthoek is (hoekensom vierhoek waarvan al drie hoeken recht zijn). De diagonalen en snijden elkaar in een punt . De diagonalen van een rechthoek zijn even lang en delen elkaar middendoor (elementair te bewijzen met congruentie-eigenschappen). Dus , zodat er een cirkel is met middelpunt die door , en gaat. Van deze cirkel is een diameter. | | Thales (4).png |

**Omtrekshoek en middelpuntshoek**

|  |  |
| --- | --- |
| Neem drie punten op een cirkel met  middelpunt . Zie de nevenstaande figuur.   We noemen een **omtrekshoek**. De cirkelboog tussen en waar niet op ligt  bepaalt een **middelpuntshoek** . Van heet de  **bijbehorende middelpuntshoek**. | mpthoekenomtrhoek (1).png |

**Stelling van de omtrekshoek**Een omtrekshoek is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek.

**Bewijs**Trek . De driehoeken zijn gelijkbenig want  
.

|  |  |
| --- | --- |
| Dit verklaart de twee paren gelijke hoeken in de nevenstaande figuur.   en  (hoekensommen driehoeken).  Dit geeft:      . Q.E.D. | mpthoekenomtrhoek (2).png |

**Overstaande hoeken koordenvierhoek**

|  |  |
| --- | --- |
| Beschouw de koordenvierhoek die hiernaast is getekend.  Dan geldt (**koordenvierhoek-eigenschap**): **en**  . | **overstaande hoeken koordenvierhoek (0b).png** |

**Bewijs**  
Noem het middelpunt van de cirkel. We hoeven slechts aan te tonen dat  
 (omdat + . Er zijn drie gevallen.

|  |  |
| --- | --- |
| **I)** ligt binnen de koordenvierhoek.  Trek de lijnen .  Er ontstaan dan vier gelijkbenige driehoeken. Dit verklaart de aangegeven vier paren gelijke hoeken.  Er geldt (hoekensom vierhoek ):  , dus   , , . | overstaande hoeken koordenvierhoek (1).png |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **II)** ligt buiten de koordenvierhoek.   Trek de lijnen . Er ontstaan dan vier gelijkbenige driehoeken. In de aangegeven benoemingen van de hoeken geldt dat:  (want ∆ is gelijkbenig) en (want ∆ is gelijkbenig). Nu hebben we dat (hoekensom vierhoek ):  ,  ,  , ,  . | | | overstaande hoeken koordenvierhoek (2).png |
| **III)** ligt op een zijde van de koordenvierhoek.  Trek weer de lijnen .  Er ontstaan dan drie gelijkbenige driehoeken. Dit leidt tot de aangegeven gelijke hoeken.  Er geldt (hoekensom vierhoek ):  ,  , , . | overstaande hoeken koordenvierhoek (3).png | | | |
| **Opmerking** Indien we toestaan dat we gebruikmaken van de eigenschap dat in een cirkel een omtrekshoek de helft is van de bijbehorende middelpuntshoek  (deze eigenschap is zeer snel te bewijzen) dan is de bovenstaande eigenschap over de som van de overstaande hoeken van een koordenvierhoek eenvoudig aan te tonen : neem aan dat . Dan , dus . Dit geeft dat , zodat . | | overstaande hoeken koordenvierhoek (4).png | |

**Stelling (omkering koordenvierhoek-eigenschap)**Als van een vierhoek twee overstaande hoeken samen gelijk zijn aan , dan is die vierhoek een koordenvierhoek.  
**Bewijs**  
Neem aan dat een vierhoek is waarvoor geldt dat .  
Beschouw de cirkel Γ die gaat door de punten We moeten aantonen dat ook op Γ ligt. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Stel dat *niet* op Γ ligt. We onderscheiden dan twee gevallen.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I)** ligt buiten Γ.  Laat het punt zijn waar Γ de lijn snijdt.  Er geldt (omdat een buitenhoek van een driehoek groter is dan elk van de twee niet-aangrenzende binnenhoeken):  en , dus **(1).** Verder geldt: ° (kv-eigenschap) en ° (gegeven) , dus (**2)** | omkeringkve (1).png | |
| **(1)** en **(2)** zijn in tegenspraak met elkaar, dus kan *niet* buiten Γ liggen. | | |
| **II)** ligt binnen Γ. Laat het punt zijn waar Γ de lijn snijdt.  Er geldt (omdat een buitenhoek van een driehoek groter is dan elk van de twee niet-aangrenzende binnenhoeken):  en , dus **(1).** Verder geldt: ° (gegeven) en  ° (kv-eigenschap) , dus (**2) (1)** en **(2)** zijn in tegenspraak met elkaar, dus kan *niet* binnen Γ liggen. | | omkeringkve (2).png |

Omdat zowel **I)** als **II)** tot tegenspraak leiden, ligt op Γ. Q.E.D.  
  
Er is een andere formulering van de kv-eigenschap die vaak nog iets handiger is.  
Daartoe maken we gebruik van het begrip buitenhoek van een vierhoek.

|  |  |
| --- | --- |
| Zie de hiernaast getekende vierhoek . Zijde is bij een stukje verlengd waardoor ontstaat. Deze hoek heet een **buitenhoek** van de vierhoek. Van deze buitenhoek is de overstaande binnenhoek.  We komen dan tot de volgende twee stellingen die evident op hetzelfde neerkomen als de bovenstaande stellingen. | buitenhoek vierhoek.png |

**Stelling A (koordenvierhoek-eigenschap)**  
Bij een koordenvierhoek is elke binnenhoek gelijk aan de overstaande buitenhoek.  
  
**Stelling B (omkering koordenvierhoek-eigenschap)**  
Indien bij een vierhoek een binnenhoek gelijk is aan de overstaande buitenhoek, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.

|  |  |
| --- | --- |
| We geven een toepassing.  Zie de nevenstaande figuur. Twee cirkels snijden elkaar in twee punten en . Door en worden twee lijnen en getrokken en dit levert vier extra snijpunten met de twee cirkels.  Toon aan dat evenwijdig is aan | overstaande hoeken koordenvierhoek (5).png |

Het bewijs is eenvoudig en zeer kort. Tweemaal toepassen van stelling A op de koordenvierhoeken en geeft: , waaruit het gewenste resultaat direct volgt m.b.v. de omgekeerde eigenschap van hoeken.

**Constantehoek-stelling**

|  |  |
| --- | --- |
| Zie de nevenstaande figuur. Neem een cirkel met daarop twee vaste punten en . Deze twee punten verdelen de cirkel in twee cirkelbogen. Kies een punt willekeurig op een van deze twee bogen.De volgende stelling zegt dat niet verandert als we laten bewegen over de gekozen (hier groene = bovenste) boog. | constantehoek-stelling (1).png |

**Constantehoek-stelling** heeft een vaste (constante) waarde als beweegt langs een van de cirkelbogen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** **1** Zie de figuur hiernaast.  Het middelpunt van de cirkel is ook aangegeven. We moeten aantonen dat voor twee willekeurige punten en op dezelfde cirkelboog geldt: . Dit volgt echter meteen uit de eigenschap over de omtrekshoek en middelpuntshoek: . | constantehoek-stelling (2).png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 2** Kies een willekeurig punt op de andere boog bepaald door de punten en . Volgens de koordenvierhoek-eigenschap geldt:  en . Hieruit kunnen we direct concluderen dat  . | **constantehoek-stelling (2b).png** |

**Omkering constantehoek-stelling**Als en aan dezelfde kant van lijn liggen en , dan liggen   
 op één cirkel.

**Bewijs**Laat de Ω de cirkel zijn door . We willen aantonen dat ook op Ω ligt.  
We bewijzen dit uit het ongerijmde en nemen aan dat niet op Ω ligt.  
Hierbij zijn twee gevallen te onderscheiden.

|  |  |
| --- | --- |
| **I)**  ligt buiten Ω.  Laat de cirkel snijden in het punt .  Er geldt: (gegeven) en (constantehoek-stelling) , dus .  Dit is echter onmogelijk want is een buitenhoek van Δ, dus . | **omkeringchs (1).png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **II)**  ligt binnen Ω. Laat de cirkel snijden in het punt .  Er geldt: (gegeven) en  (constantehoek-stelling) , dus . Dit is echter onmogelijk want is een buitenhoek van Δ, dus . | omkeringchs (2).png |

Beide gevallen leiden tot een tegenspraak, dus ligt op Ω. Q.E.D.

**Raaklijn en voerstraal**

|  |  |
| --- | --- |
| Een **raaklijn** aan een cirkel is per definitie een lijn die precies één punt met de cirkel gemeen heeft. Dat gemeenschappelijke punt heet het **raakpunt**. Bekijk de volgende cirkel met middelpunt een en raaklijn aan . Het raakpunt is . Dan blijkt te gelden dat loodrecht staat op . | raaklijnenstraal (1).png |

**Stelling:** een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de voerstraal naar het raakpunt. **Bewijs**We geven een bewijs uit het ongerijmde. Zie de onderstaande figuur.

|  |  |
| --- | --- |
| Laat een raaklijn aan de cirkel zijn en het raakpunt.  We nemen aan dat **niet** loodrecht op staat **(\*)**. Kies op zó dat loodrecht staat op . Vanwege de aanname **(\*)** valt niet samen met punt . Kies punt op zodanig dat . We mogen er nog niet van uit gaan dat op ligt, maar zullen dit wel gaan bewijzen. Er geldt dat: , en ∠. Hieruit volgt dat: (ZHZ).  Dit impliceert dat straal , zodat op ligt. | raaklijnenstraal (2).png |

Derhalve heeft (minstens) twee punten gemeenschappelijk met (namelijk en ), in strijd met het gegeven dat een raaklijn is aan . Hiermee is een tegenspraak bereikt. De aanname **(\*)** is bijgevolg onjuist, zodat **wel** loodrecht staat op . Q.E.D.  
  
De bovenstaande stelling heeft ook een omkering.  
  
**Stelling:** als een lijn een cirkel met middelpunt snijdt in een punt en   
loodrecht staat op , dan is een raaklijn . **Bewijs**  
We geven weer een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat **geen** raaklijn is aan .   
Dan snijdt de cirkel in een tweede punt *B*. Vanwege straal )  
is gelijkbenig, dus de basishoeken zijn gelijk. Er volgt dat .   
Dit zou betekenen dat twee rechte hoeken heeft, hetgeen natuurlijk onmogelijk is (hoekensom driehoek). De aanname dat **geen** raaklijn aan is leidt tot een tegenspraak, dus is inderdaad een raaklijn aan . Q.E.D.

**Hoek tussen een raaklijn en een koorde in een cirkel**

|  |  |
| --- | --- |
| Zie de nevenstaande figuur.  Getekend is een cirkel met daarin koorde en de raaklijn aan de cirkel in punt Kies een willekeurig punt op die cirkelboog waarvoor ∠ niet-stomp is. Dan blijkt te gelden dat de hoek tussen en gelijk is aan ∠. Dit is de inhoud van de volgende stelling. Merk op dat ∠ voor alle punten op de gekozen cirkelboog dezelfde waarde heeft (constantehoek-stelling). We noemen deze hoek ook wel de niet-stompe omtrekshoek die **staat op de koorde**. | hoek tussen raaklijn en koorde (1).png |

**Stelling 1**In een cirkel geldt dat de hoek tussen een raaklijn en koorde gelijk is aan de niet-stompe omtrekshoek die staat op die koorde. **Bewijs**

|  |  |
| --- | --- |
| De hoek tussen de raaklijn en de koorde, waarbij raakt aan de cirkel in punt , noemen we . We trekken de stralen en , waarbij het middelpunt van is. Dan is Δ gelijkbenig met , dus heeft gelijke basishoeken.  Stel ∠. Er geldt dat loodrecht staat op (raaklijn en voerstraal), dus . Nu geldt: ∠ (hoekensom driehoek).  Hieruit volgt: ∠ (omtrekshoek is de helft van de middelpuntshoek) Q.E.D. | **hoek tussen raaklijn en koorde (2).png** |

Als je iets moet bewijzen in een vraagstuk waarin een cirkel met een raaklijn voorkomt, kijk dan of je de bovenstaande stelling kunt gebruiken.  
Als je iets moet aantonen in een probleem met twee elkaar (inwendig of uitwendig) rakende cirkels, trek dan zelf de gemeenschappelijke raaklijn. Vaak kun je dan de bovenstaande stelling gebruiken.

**Gelijke raaklijnstukken**

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling** Gegeven een cirkel en een punt buiten . Vanuit worden twee raaklijnstukken en getrokken. Dan geldt dat . | **gelijke raaklijnstukken (1).png** |

We zullen drie verschillende bewijzen geven.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 1** Laat het middelpunt van zijn. Trek de lijnstukken en . We weten dat een raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op het verbindingslijnstuk ( voerstraal) van het raakpunt en het middelpunt van de cirkel ;  zie zo nodig het document ‘Raaklijn en voerstraal’.  Dit betekent hier dat .  Verder geldt dat straal ) en  (in (in ). | **gelijke raaklijnstukken (2).png** |
| Dit alles impliceert dat (ZZR). We kunnen hieruit concluderen dat . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs 2** Kies een punt op op dat aan de andere kant van lijn ligt als . Volgens de stelling van de hoek tussen raaklijn en koorde geldt dat en ook . Dit geeft dat , dus  (gelijke basishoeken in | gelijke raaklijnstukken (3).png |

**Bewijs 3** (voor wie bekend is met het begrip macht bij cirkels).  
Volgens de machtstelling geldt:  
 macht van t.o.v. , dus .

**Loodlijn op koorde**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Stelling 1** In de cirkel met middelpunt is een koorde.  staat loodrecht op , waarbij op ligt. Dan geldt: . | **loodlijn op koorde (1).png** | |
| **Bewijs** Trek de stralen en . Er geldt dat , en . Dit impliceert dat (ZZR), waaruit we kunnen concluderen dat . | | **loodlijn op koorde (2).png** |

Deze stelling heeft ook een soort omkering  
  
**Stelling 2**  
Een lijn die loodrecht staat op een koorde in een cirkel en die koorde in twee gelijke stukken verdeelt, gaat door het middelpunt van van .  
**Bewijs**  
Lijn is de middelloodlijn van lijnstuk en bestaat derhalve uit de punten die een gelijke afstand hebben tot en . Punt heeft gelijke afstanden tot en en ligt bijgevolg op lijn .

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 3** In de cirkel met middelpunt is een koorde.  is het middelpunt van . Dan staat loodrecht op  **Bewijs** Er geldt: (ZZZ) en hieruit volgt dat  . Omdat deze twee hoeken samen zijn (gestrekte hoek bij ), volgt er dat elk gelijk is aan . We kunnen hieruit concluderen dat loodrecht staat op . | loodlijn op koorde (3).png |

**Machtstelling  
  
Stelling 1 (machtstelling)**Laat en twee koorden zijn in een cirkel die elkaar (zo nodig na verlengen) snijden in   
punt . Dan geldt: .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| machtstelling (1).png | machtstelling (3).png | |
| **Bewijs** Als op de cirkel ligt dan geldt duidelijk dat . We nemen nu aan dat niet op ligt dus ligt binnen (situatie 1) of ligt buiten (situatie 2). Zie de figuren hieronder. Trek de lijnstukken en . Er geldt (constantehoek-stelling).  Ook geldt dat (triviaal in situatie 2 en overstaande hoeken in situatie 1) Dit impliceert dat (hh). Hieruit vinden we dat , dus . | | | |
| situatie 1) ligt binnen .  machtstelling (2).png | | situatie 2) ligt buiten .  machtstelling (4).png | |

**Stelling 2 (omkering van de machtstelling)**A)Als het snijpunt is van het inwendige van de lijnstukken en en er voldaan is aan de  
 betrekking , dan liggen de punten en op één cirkel.  
B) Als het snijpunt is van de lijnen en , waarbij buiten de lijnstukken en ligt, en   
 en er voldaan is aan de betrekking , dan liggen de punten en op één  
 cirkel.  
**Bewijs**  
Dit volgt eenvoudig uit het omkeren van de stappen in het bewijs van stelling 1 en door gebruik te maken van **zhz** en de omkering van de constantehoek-stelling.

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 3**  is een punt buiten de cirkel . Een raaklijn door aan raakt in punt . Een lijn door snijdt in de punten en . Dan geldt: |  |
| **Bewijs** Trek de koorden en . Er geldt dat   (hoek tussen raaklijn en koorde). Hieruit volgt dat (hh). Dit geeft de betrekking , dus . | **machtstelling (6).png** |
| **Opmerking** Vanwege stelling 1 is het resultaat van stelling 3 intuïtief evident. Trek een lijn door die in twee punten, zeg en , snijdt. Volgens stelling 1 geldt dat . (\*) Laat nu de lijn door en draaien in de richting van de raaklijn . De lengtes van en naderen steeds meer tot de lengte van . Het product in (\*) nadert daarom steeds meer tot en aldus komen we tot  . | **machtstelling (7).png** |

Deze intuïtieve redenering is echter geen formeel bewijs, omdat we geen limietprocessen toelaten in de meetkunde.

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 4 (omkering van stelling 3, geen examenstof)**  is een punt buiten de cirkel . Punt ligt op .  Een lijn door snijdt in de punten en .  Neem aan dat er geldt:  Dan raakt lijn aan . | machtstelling (5).png |

**Bewijs**Laat het raaklijnstuk aan zijn (met op), waarbij en aan dezelfde kant van lijn liggen. Volgens stelling 3 geldt er dat Gegeven is dat , dus vinden we dat en dit leidt tot . Er zijn maar twee punten op op met de eigenschap dat , namelijk en het tweede punt op zodanig dat raakt aan .  
ligt aan de andere kant van dan . Uit en het feit dat en aan dezelfde kant van lijn liggen, volgt daarom dat . We kunnen hieruit concluderen dat raakt aan .

**Booghoeken**Bij hoekberekeningen in figuren waarin een cirkel voorkomt blijkt het vaak handig te zijn om gebruik te maken van het begrip **booghoek**.

|  |  |
| --- | --- |
| Zie de nevenstaande figuur. Op de cirkel zijn twee punten en gekozen. We bekijken de rode cirkelboog (rechtsboven) met randpunten en . Dan definiëren we en noemen dit **booghoek** . We kunnen ook zeggen dat de booghoek van een cirkelboog gelijk is aan de bijbehorende **middelpuntshoek**. Als we bij gegeven punten en de hoek gebruiken, dan moet wel duidelijk aangegeven zijn welke van de twee cirkelbogen bepaald door de punten en bedoeld is. | booghoek1.png |

**Eigenschap 1 (omtrekshoek)**  
Als in de bovenstaande figuur een punt op is die niet ligt op de boog bepaald door ,   
dan geldt .

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Trek de lijnen . Er ontstaan dan twee gelijkbenige driehoeken. De gelijke basishoeken zijn aangegeven in de figuur.   en  dus     en dit geeft . | **booghoek2.png** |

heet een **omtrekshoek.** Met behulp van het begrip booghoek kunnen we handig binnenomtrekshoeken en buitenomtrekshoeken van cirkels uitrekenen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Eigenschap 2 (binnenomtrekshoek)** De twee lijnen en , waarbij de punten op cirkel liggen, snijden elkaar binnen in punt . Dan geldt dat:  De bijbehorende cirkelbogen zijn de delen van de cirkel ingesloten door de benen van en de benen van (overstaande hoek). | binnenomtrekshoek1.png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs**  Trek lijnstuk .  is een buitenhoek van , dus volgt er, onder gebruikmaking van eigenschap 1 :    .  heet een **binnenomtrekshoek**. | **binnenomtrekshoek2.png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Eigenschap 3 (buitenomtrekshoek)** De twee lijnen en , waarbij de punten op cirkel liggen, snijden elkaar buiten in punt .  Zie de figuur hiernaast. Dan geldt dat: .De bijbehorende cirkelbogen zijn de delen van de cirkel ingesloten door de benen van en is de cirkelboog | **buitenomtrekshoek1.png** |
| corresponderend met groter dan de cirkelboog corresponderend met . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bewijs** Trek lijnstuk .  is een buitenhoek van  dus volgt er  zodat (vanwege eigenschap 1):  .  heet een **buitenomtrekshoek**. | **buitenomtrekshoek2.png** |

De volgende eigenschap is ook vaak handig.  
  
**Eigenschap 4 (optelregel voor booghoeken)**Op een cirkelmet middelpunt zijn gegeven   
(zie de linkerfiguur bovenaan op de volgende pagina):  
een cirkelboog met eindpunten en en bijbehorende booghoek ;  
een cirkelboog met eindpunten en en bijbehorende booghoek .  
De cirkelbogen en overlappen elkaar niet (hoogstens eindpunten gemeenschappelijk). Laat een cirkelboog zijn met eindpunten en en bijbehorende booghoek waarvan de lengte gelijk is aan de som van lengtes van en . Dan geldt: .

|  |  |
| --- | --- |
| booghoek3.png | booghoek4.png |

**Bewijs**Kies punt op de rode cirkelboog zodanig dat de lengte van cirkelboog gelijk is de lengte van (zie de rechterfiguur hierboven); dan geldt natuurlijk ook dat d. Er volgt dat  
.

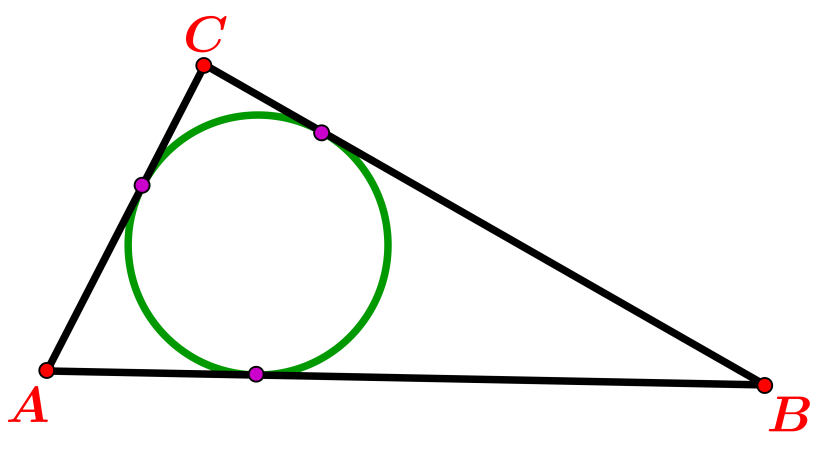
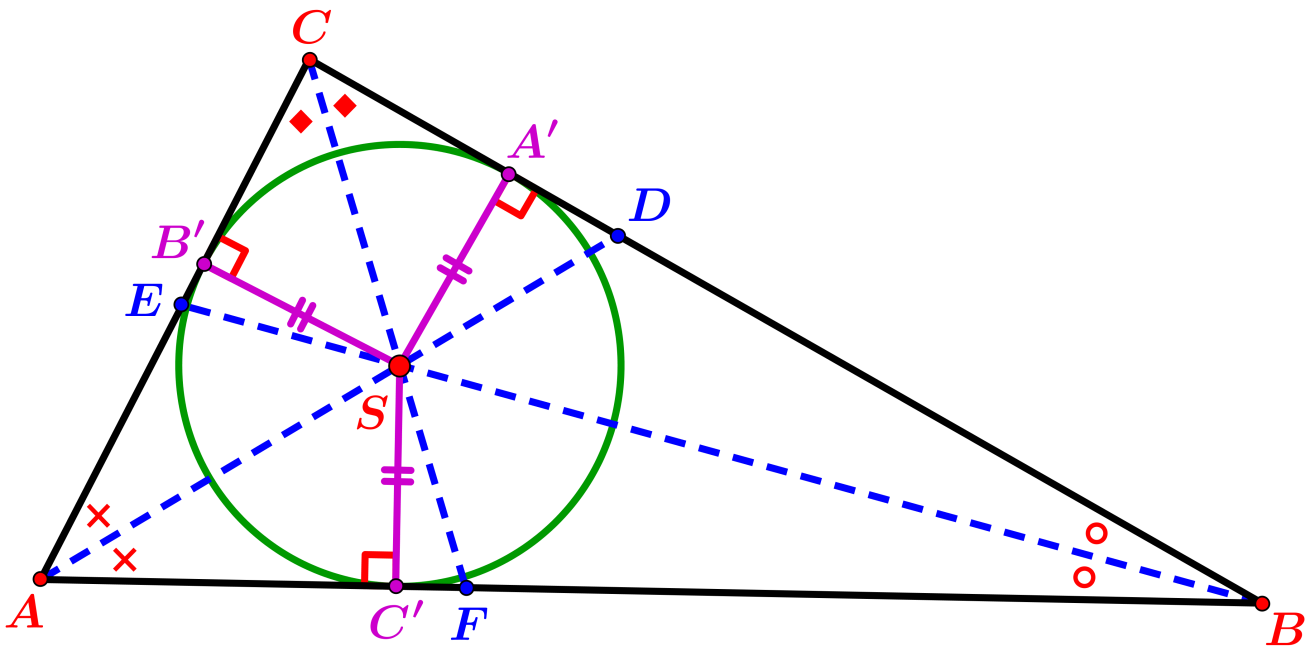
|  |  |
| --- | --- |
| **Toepassing** In de figuur hiernaast is een regelmatige negenhoek getekend met de diagonalen   en die elkaar snijden in . Bereken .  **Oplossing**    (korte cirkelboog)  . | booghoek5.png |

**Omgeschreven cirkel**

|  |  |
| --- | --- |
| Elke driehoek heeft een **omgeschreven cirkel**.  Dit is de cirkel dit gaat door de drie hoekpunten van de driehoek.  Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek. Deze middelloodlijnen zijn met passer en liniaal te construeren. In deze figuur zijn en de middelloodlijnen van de zijden en . | omgeschreven cirkel (1).png |

Als de driehoek scherphoekig is, zoals hierboven, dan ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel binnen de driehoek.  
  
Als de driehoek stomphoekig, dan ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel buiten de driehoek.   
  
Als de driehoek rechthoekig is, dan is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.  
  
Zie voor de laatste twee situaties de volgende figuren.

|  |  |
| --- | --- |
| omgeschreven cirkel (2).png | omgeschreven cirkel (3).png |

**Ingeschreven cirkel**Elke driehoek bezit een zogenaamde **ingeschreven cirkel**. Dit is een cirkel die (inwendig) raakt aan de zijden van de driehoek.  
  
  
Hoe we een dergelijke cirkel kunnen vinden blijkt uit de volgende figuur.  
  
  
  
De drie bissectrices van ∆ gaan door één punt (eenvoudig te bewijzen) en hun snijpunt heeft gelijke afstanden tot de drie zijden van ∆ dus is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.   
In de bovenstaande figuur zijn en de drie raakpunten.  
 en ook zijn met passer en liniaal te construeren.  
  
Er geldt de volgende eigenschap (geen examenstof):  
  
de drie lijnen en gaan door één punt.  
  
Het snijpunt van die drie lijnen wordt het **punt van GerGonne** genoemd.

**Aangeschreven cirkel**

|  |  |
| --- | --- |
| Een **aangeschreven cirkel** van een driehoek is een cirkel die (uitwendig) raakt aan een zijde en aan de verlengingen van de twee andere zijden.  In de hiernaast getekende figuur is het middelpunt van de aangeschreven cirkel het snijpunt van de binnendeellijn van en de buitendeellijn van . Ook de buitendeellijn van gaat door dit punt. | aangeschreven cirkel (1).png |

|  |  |
| --- | --- |
| Elke driehoek heeft drie aangeschreven cirkels.  Laten we middelpunten van drie aangeschreven cirkels en noemen waarbij de cirkel met middelpunt raakt aan de zijde , enz.  Dan geldt de volgende eigenschap (geen examenstof):  de drie lijnen en gaan door één punt.  Het snijpunt van die drie lijnen wordt het **punt van Nagel** genoemd. | aangeschreven cirkel (2).png |

**Antiparallel**

|  |  |
| --- | --- |
| Gegeven is een driehoek met daarin een lijnstuk , waarbij op en op ligt. Er geldt hier dat . In deze situatie heet een **antiparallel** van zijde . Merk op dat dan ook geldt dat , omdat en gelijkvormig zijn (hh). De naam ‘antiparallel’ is wel logisch te verklaren. Indien **parallel** is aan , dan geldt dat  en (F-hoeken). Indien antiparallel is aan , dan geldt dat  en . | **antiparallel (1).png** |

**Stelling 1**Als in de punten op zijde en op zijde gegeven zijn, dan geldt:  
 is antiparallel aan vierhoek is een koordenvierhoek.  
**Bewijs**  
 is antiparallel aan van vierhoek is de buitenhoek bij gelijk aan de overstaande binnenhoek bij vierhoek is een koordenvierhoek.  
  
**Stelling 2**  
Als in lijnstuk antiparallel is aan , met op en op , dan geldt dat  
.  
**Bewijs**  
 (hh), dus , oftewel .

|  |  |
| --- | --- |
| **Stelling 3** Neem aan dat en twee hoogtelijnen in zijn. Dan is antiparallel aan . **Bewijs** Uit volgt dat een koordenvierhoek is (omkering constantehoek-stelling), dus de buitenhoek bij is gelijk aan de overstaande binnenhoek bij . Dit impliceert dat antiparallel is aan . | antiparallel (3).png |

**Driehoeksongelijkheid**

|  |  |
| --- | --- |
| Voor een willekeurige driehoek geldt: .  Dit heet de **driehoeksongelijkheid**. De juistheid ervan in intuïtief evident: wanneer je via van naar gaat, dan is de afstand groter dan wanneer je rechtstreeks van naar gaat. Met behulp van de driehoeksongelijkheid zijn talloze niet-triviale ongelijkheden in driehoeken en vierhoeken af te leiden.  De kunst daarbij is om de driehoeksongelijkheid op een geschikte driehoek toe te passen. | **driehoeksongelijkheid (1).png** |

**Bewijs van de driehoeksongelijkheid**We gebruiken de eigenschap dat in een rechthoekige driehoek de lengte van de schuine zijde groter is dan de lengte van elk van de rechthoekszijden. Voor met geldt namelijk volgens de stelling van Pythagoras: en hieruit volgt dat , dus en ook dus . Neem nu een willekeurige driehoek . We willen aantonen dat  
. Daartoe onderscheiden we drie gevallen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a)    driehoeksongelijkheid (2).png  Trek de hoogtelijn . Er geldt:  en , dus  , oftewel . | b)     driehoeksongelijkheid (3).png     , dus zeker geldt   dat . | c)   driehoeksongelijkheid (4).png    Trek de hoogtelijn .  , dus zeker   geldt dat . |

**Bissectricestelling  
  
Stelling 1 (bissectricestelling voor de inwendige of uitwendige deellijn)**In is de inwendige of uitwendige deellijn uit . Dan geldt: .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **bissectricestelling (1).png** |  | **bissectricestelling (3).png** | | | |
| **Bewijs** Trek door de lijn evenwijdig aan . Deze lijn snijdt lijn in punt . Voor het vervolg onderscheiden we twee gevallen.  **A)** **Inwendige deellijn** Er geldt dat (Z-hoeken) (deellijn). Ook geldt dat (Z-hoeken). Dit impliceert dat (hh). Er volgt: (\*). Nu geldt dat (gelijke basishoeken in ), dus de betrekking (\*) gaat over in . | | | | bissectricestelling (2).png |
| **B) Uitwendige deellijn** Er geldt dat (F-hoeken)  Ook geldt dat . Dit impliceert dat (hh).  Er volgt: (\*). Vanwege (Z-hoeken)  (deellijn) geldt dat (gelijke basishoeken in ), dus de betrekking (\*) gaat over in . | | | bissectricestelling (4).png | | |

**Hulpstelling**  
a) Als en beide liggen op het inwendige van lijnstuk en er geldt dat ,  
 dan volgt er dat .  
b) Als en beide liggen op het verlengde van lijnstuk en er geldt dat ,  
 dan volgt er dat .

**Bewijs**(maak zo nodig zelf een schets van beide situaties).a): We herleiden de gegeven betrekking:  
 , , ,   
 . Er volgt dat . Omdat er tussen en slechts één punt is dat op  
 een gegeven afstand van ligt, volgt er dat .  
b): We merken eerst op dat en niet aan weerszijden van lijnstuk kunnen liggen omdat  
 anders van de twee verhoudingen en er een groter dan 1 is en de andere  
 kleiner dan 1. In dit geval kan niet voldaan zijn aan .  
 Laten we daarom bijvoorbeeld aannemen dat en aan de kant van liggen (het andere  
 geval verloopt analoog). We herleiden de gegeven betrekking:  
 , , ,   
 . Er volgt dat . Omdat er op het verlengde van lijnstuk aan de   
 kant van slechts één punt is dat op een gegeven afstand van ligt, volgt er dat .  
   
**Stelling 2 (omkering van de bissectricestelling voor de inwendige of uitwendige deellijn)**Als in punt op lijn zodanig dat dan is de inwendige deellijn van als tussen en ligt en de uitwendige deellijn van als buiten en ligt.  
**Bewijs**Laat , met op lijn , de inwendige deellijn van zijn als tussen en ligt en de uitwendige deellijn zijn van zijn als als buiten lijnstuk ligt. Volgens stelling 1 geldt dat  
. Gelet op de gegeven betrekking , weten we dan dat  
. Toepassen van de hulpstelling geeft , waarna de gewenste conclusie uit de stelling direct volgt.

**Punt van Fermat**

|  |  |
| --- | --- |
| Zie de figuur hiernaast. Gegeven is een willekeurige driehoek .  Op de zijden van deze driehoek worden aan de buitenkant gelijkzijdige driehoeken getekend. Van deze drie gelijkzijdige driehoeken worden vervolgens de omgeschreven cirkels getekend. De drie cirkels lijken elkaar te snijden in één punt. De volgende stelling leert dat dit inderdaad zo is.   Het gemeenschappelijke punt wordt het **punt van Fermat** genoemd. | **Fermat1.png** |

**Stelling 1 (Fermat, 1601-1665)**Als op de zijden van aan de buitenkant gelijkzijdige driehoeken worden getekend, dan gaan de drie omgeschreven cirkels van deze gelijkzijdige driehoeken door één punt.  
**Bewijs**  
Neem aan dat de omgeschreven cirkels van en elkaar snijden in een punt   
We onderscheiden drie gevallen.

|  |  |
| --- | --- |
| **1)** ligt binnen .  Er geldt (koordenvierhoekeigenschap)  en   .  Dit geeft dat   , zodat  .  Er volgt dat een koordenvierhoek is (omkering koordenvierhoek-eigenschap), waarmee is aangetoond dat de omgeschreven cirkel van ook door gaat. | **Fermat2.png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **2)** ligt buiten .  Er geldt:  (constante hoek) en  , dus  . , dus  is een koordenvierhoek (omkering constante hoek)   ligt daarom op de omgeschreven cirkel van | **Fermat3.png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **3)** ligt op een zijde van .  Dan moet samenvallen met het punt , dus is het evident dat ligt op de omgeschreven cirkel van . Q.E.D. | **Fermat4.png** |

We merken op dat in geval 3) van het bovenstaande bewijs hoek gelijk is aan .Het punt van Fermat blijkt een speciale betekenis te hebben voor het geval alle hoeken van kleiner zijn dan . Het is het punt binnen waarvoor de som van de afstanden tot de hoekpunten minimaal is. Dit probleem heeft ook praktische toepassingen.   
Stel dat men drie plaatsen , en , gelegen in een uitgestrekt gebied (met alle hoeken van kleiner dan ), wil verbinden met een wegennet, waarvan de aanlegkosten per km zeer hoog zijn. Hoe moet het wegennet dan lopen opdat de totale kosten minimaal zijn?  
De oplossing is dat men het punt van Fermat bepaalt en vanuit dat punt rechte wegen aanlegt naar de drie plaatsen , en .