**Raaklijn en poollijn bij kegelsneden**

Een algemene kegelsnede (cirkel, ellips, hyperbool, parabool) $K$ heeft een vergelijking van de vorm: $ax^{2}+bxy+cy^{2}+dx+ey+f=0$.
Stel dat het punt $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$ op $K$ ligt. We willen de vergelijking van de raaklijn aan $K$ in $A$ opstellen. We stellen eerst de parametervoorstelling van een willekeurige lijn $m$ door $A$ op :
$\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)+λ\left(\begin{matrix}r\\s\end{matrix}\right)$ , waarbij $r$ en $s$ niet beide gelijk aan 0 kunnen zijn.
Uitgeschreven in beide componenten hebben we: $\left\{\begin{array}{c}x=x\_{A}+λr\\y=y\_{A}+λs\end{array}\right.$ .
De snijpunten van $m$ met $K$ vinden we door het oplossen van $λ$ uit:
$a\left(x\_{A}+λr\right)^{2}+b\left(x\_{A}+λr\right)\left(y\_{A}+λs\right)+c\left(y\_{A}+λs\right)^{2}+d\left(x\_{A}+λr\right)+e\left(y\_{A}+λs\right)+f=0$,
$a\left(x\_{A}^{2}+2λx\_{A}r+λ^{2}r^{2}\right)+b\left(x\_{A}y\_{A}+λx\_{A}s+λy\_{A}r+λ^{2}rs\right)+c\left(y\_{A}^{2}+2λy\_{A}s+λ^{2}s^{2}\right)$
$+ dx\_{A}+λdr+ey\_{A}+λes+f=0$,
hetgeen te herschrijven is tot de vorm $Pλ^{2}+Qλ+R=0$, waarbij
$P=ar^{2}+brs+cs^{2}$,
$Q=2ax\_{A}r+bx\_{A}s+by\_{A}r+2cy\_{A}s+dr+es$ en
$R= ax\_{A}^{2}+bx\_{A}y\_{A}+cy\_{A}^{2}+dx\_{A}+ey\_{A}+f$.
Er geldt dat $R=0$ , omdat $A$ op $K$ ligt. Dit geeft: $Pλ^{2}+Qλ=0.$
Neem nu aan dat $m$ een raaklijn aan $K$ is. Dan heeft de vergelijking $Pλ^{2}+Qλ=0$ een tweevoudige oplossing $λ=0$ en dit kan slechts het geval zijn als $P\ne 0$ en $Q=0.$
We herschrijven $Q=0$ als $\left(2ax\_{A}+by\_{A}+d\right)r+\left(bx\_{A}+2cy\_{A}+e\right)s=0$.
Hieraan voldoen $r=bx\_{A}+2cy\_{A}+e$ en $s=-\left(2ax\_{A}+by\_{A}+d\right)$ (en alle andere oplossingen zijn van de vorm $r=k∙\left(bx\_{A}+2cy\_{A}+e\right)$ , $s=-k∙\left(2ax\_{A}+by\_{A}+d\right)$ , met $k\ne 0$) .
De vergelijking van $m$ is $-sx+ry=-sx\_{A}+ry\_{A}$ , dus
$\left(2ax\_{A}+by\_{A}+d\right)x+ \left(bx\_{A}+2cy\_{A}+e\right)y=\left(2ax\_{A}+by\_{A}+d\right)x\_{A}+\left(bx\_{A}+2cy\_{A}+e\right)y\_{A} $
en dit is om te schrijven tot
$2ax\_{A}x+b\left(y\_{A}x+x\_{A}y\right)+2cy\_{A}y+d\left(x+x\_{A}\right)+e\left(y+y\_{A} \right)+2f=$
$2\left(ax\_{A}^{2}+bx\_{A}y\_{A}+cy\_{A}^{2}+dx\_{A}+ey\_{A}+f\right)=2R=0$, oftewel

$ax\_{A}x+\frac{1}{2}b\left(y\_{A}x+x\_{A}y\right)+cy\_{A}y+\frac{1}{2}d\left(x+x\_{A}\right)+\frac{1}{2}e\left(y+y\_{A} \right)+f=0$.

Hiermee is de vergelijking van de raaklijn aan $K$ in het punt $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$ gevonden.
Gegeven is nu een punt $P(x\_{P},y\_{P})$ dat niet op $K$ ligt en we veronderstellen dat er vanuit $P$ twee raaklijnen aan $K$ te trekken zijn. Noem de twee raakpunten $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$ en $B\left(x\_{B},y\_{B}\right).$
Voor de raaklijnen $r\_{1}$ in $A$ en $r\_{2}$ in $B$ gelden volgens het eerder gevondene de volgende vergelijkingen
$r\_{1}: ax\_{A}x+\frac{1}{2}b\left(y\_{A}x+x\_{A}y\right)+cy\_{A}y+\frac{1}{2}d\left(x+x\_{A}\right)+\frac{1}{2}e\left(y+y\_{A} \right)+f=0$,
$r\_{2}: ax\_{B}x+\frac{1}{2}b\left(y\_{B}x+x\_{B}y\right)+cy\_{B}y+\frac{1}{2}d\left(x+x\_{B}\right)+\frac{1}{2}e\left(y+y\_{B} \right)+f=0$.
$P(x\_{P},y\_{P})$ligtop beide raaklijnen, dus er geldt:
$ax\_{A}x\_{P}+\frac{1}{2}b\left(y\_{A}x\_{P}+x\_{A}y\_{P}\right)+cy\_{A}y\_{P}+\frac{1}{2}d\left(x\_{P}+x\_{A}\right)+\frac{1}{2}e\left(y\_{P}+y\_{A}\right)+f=0$.(1)$ax\_{B}x\_{P}+\frac{1}{2}b\left(y\_{B}x\_{P}+x\_{B}y\_{P}\right)+cy\_{B}y\_{P}+\frac{1}{2}d\left(x\_{P}+x\_{B}\right)+\frac{1}{2}e\left(y\_{P}+y\_{B}\right)+f=0$.(2)
Beschouw nu de lijn $p$ met vergelijking:

$axx\_{P}+\frac{1}{2}b\left(yx\_{P}+xy\_{P}\right)+cyy\_{P}+\frac{1}{2}d\left(x\_{P}+x\right)+\frac{1}{2}e\left(y+y\_{P} \right)+f=0.$

Dit is een lineaire vergelijking in $x$ en $y$ dus het stelt inderdaad een lijn voor.
Volgens (1) en (2) voldoen de coördinaten van $A$ en $B$ aan deze vergelijking.
De lijn $p$ is derhalve de lijn door de raakpunten $A$ en $B$ en heet de **poollijn** van punt $P$ t.o.v. de kegelsnede $K$. Als $P$ op de cirkel ligt, dan is de poollijn gelijk aan de raaklijn in $P$ aan $K$.
De situatie is hieronder grafisch weergegeven:



Op de eerder aangegeven manier zijn in de punten $A$ en $B$ de vergelijkingen van de raaklijnen
$r\_{1}$ en $r\_{2}$ op te stellen. Men kan de vergelijkingen van $r\_{1}$ en $r\_{2}$ ook vinden door de eenvoudige methode te gebruiken om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen.

We vatten samen wat we gevonden hebben.

|  |
| --- |
| **Werkschema voor het opstellen van de vergelijkingen van de raaklijnen vanuit punt** $P\left(x\_{P}, y\_{P}\right)$ **aan de kegelsnede** $K$**:** $ax^{2}+bxy+cy^{2}+dx+ey+f=0$**:\* stel de vergelijking van de poollijn van** $P$ **t.o.v.** $K$ **op:** $axx\_{P}+\frac{1}{2}b\left(yx\_{P}+xy\_{P}\right)+cyy\_{P}+\frac{1}{2}d\left(x\_{P}+x\right)+\frac{1}{2}e\left(y+y\_{P} \right)+f=0$**\* los uit de vergelijking van de poollijn** $y$ **of** $x$ **op:** $y=mx+n$ **of** $x=uy+v$ **;\* substitueer** $y=mx+n$ **of** $x=uy+v$ **in de vergelijking van** $K$**;\* los de tweedegraadsvergelijking in** $x$ **of *y* die zo ontstaat op;\* bepaal hiermee de coördinaten van de snijpunten** $A$ **en** $B$ **van** $p$ **met** $K$**;\* stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan** $K$ **in de punten** $A$ **en** $B$**; dit zijn tevens de vergelijkingen van de raaklijnen vanuit punt** $P$ **aan de  kegelsnede** $K$**.** |

Speciale gevallen van de vergelijking van de raaklijn in het punt $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$.
1) cirkel: $x^{2}+y^{2}=r^{2}$ raaklijn: $xx\_{A}+yy\_{A}=r^{2}$
2) parabool: $y^{2}=4px$ raaklijn: $yy\_{A}=2p(x+x\_{A})$
3) ellips: $ \frac{x^{2}}{a^{2} } + \frac{y^{2}}{b^{2} } =1$ raaklijn: $\frac{xx\_{A}}{a^{2} } + \frac{yy\_{A}}{b^{2} } =1$
4) hyperbool: $\frac{x^{2}}{a^{2} } - \frac{y^{2}}{b^{2} } =1$ raaklijn: $\frac{xx\_{A}}{a^{2} } - \frac{yy\_{A}}{b^{2} } =1$

Dezelfde formules gelden ook voor de poollijn van punt $P(x\_{P},y\_{P})$ t.o.v. de kegelsnede
(met $x\_{A}$ vervangen door $x\_{P}$ en $y\_{A}$ vervangen door $y\_{P}$).
De methode om vanuit de vergelijking van de kegelsnede $K$ tot de vergelijking van de raaklijn in het punt $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$ te komen wordt wel **‘eerlijk delen’** genoemd.
Daartoe moeten we in de vergelijking van $K$:

$x^{2}=x∙x$ vervangen door $x∙x\_{A}$ ,
$y^{2}=y∙y$ vervangen door $y∙y\_{A}$ ,
$xy=\frac{1}{2}\left(xy+yx\right)$ vervangen door $\frac{1}{2}\left(xy\_{A}+yx\_{A}\right)$ ,
$x= \frac{1}{2}\left(x+x\right)$ vervangen door $\frac{1}{2}\left(x+x\_{A}\right)$ ,
$y=\frac{1}{2}\left(y+y\right)$ vervangen door $\frac{1}{2}\left(y+y\_{A}\right)$
en een constante losse term of een constante factor onveranderd laten.
Constante factoren worden meegenomen naar de vergelijking van de raaklijn, dus bijv. een term $dx$ in de vergelijking van $K$ gaat bij overstappen naar de vergelijking van de raaklijn over de term
$d∙\frac{1}{2}\left(x+x\_{A}\right)=\frac{1}{2}d\left(x+x\_{A}\right)$ .
Evenzo wordt m.b.v. eerlijk delen de vergelijking van een poollijn opgesteld.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1**Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de cirkel $c: x^{2}+y^{2}-2x+4y-29=0$ in het punt $A(4, 3)$.**Oplossing**Eerlijk delen geeft voor de vergelijking van de raaklijn: $4∙x+3∙y-\left(x+4\right)+2\left(y+3\right)-29=0$, dus $3x+5y=27$. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 2**Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de parabool $ p: y^{2}=4x+5$ in het punt $A(1,-3)$.**Oplossing**De vergelijking van de raaklijn is $-3∙y=2\left(x+1\right)+5$, dus $2x+3y+7=0$**.** | raaklijn en poollijn, voorbeeld 2.png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 3**Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de ellips$e: $ $\frac{x^{2}}{15}$ $+ $ $\frac{y^{2}}{10}$ $ =1$ in het punt $A(3 ,2)$.**Oplossing**De vergelijking van de raaklijn is $\frac{3 ∙ x}{15}$ $ + $ $\frac{2 ∙ y}{10}$ $ =1$, dus $x+y=5$. | **raaklijn en poollijn, voorbeeld 3a.png** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 4**Bepaal vergelijking van de raaklijn aan de hyperbool $h: 3x^{2}-5y^{2}=28$ in het punt $A(4, 2)$.**Oplossing**De vergelijking van de raaklijn is 3 ∙$ 4∙x-5∙2∙y=28$, dus**6**$x-5y=14$. | raaklijn en poollijn, voorbeeld 4.png |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 5**Gegeven is de cirkel  $c: x^{2}+y^{2}-2x-6y-3=0$. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan $c$ die gaan door het punt $P(6, 4)$.**Oplossing****Methode 1** (m.b.v. de poollijn)De vergelijking van de poollijn $p$ van $P$ t.o.v. $c$ is $6x+4y-\left(x+6\right)-3\left(y+4\right)-3=0$, dus $p: y=21-5x$. Dit invullen in de vergelijking van $c$ geeft: | raaklijn en poollijn, voorbeeld 5.png |
| $x^{2}+\left(21-5x\right)^{2}-2x-6\left(21-5x\right)-3=0$, $26x^{2}-182x+312=0$, $x^{2}-7x+12=0$, $\left(x-3\right)\left(x-4\right)=0$, $x=3 ∨ x=4$. De bijbehorende raakpunten zijn $R\_{1}(3, 6)$ en $R\_{2}\left(4, 1\right).$De raaklijnen aan $c$ in deze twee punten zijn:$r\_{1}: 3x+6y-\left(x+3\right)-3\left(y+6\right)-3=0$, dus $r\_{1}: 2x+3y=24$ en$r\_{2}: 4x+y-\left(x+4\right)-3\left(y+1\right)-3=0$, dus $r\_{2}: 3x-2y=10$. |

**Methode 2** (m.b.v. de formule van Hesse)
De algemene vergelijking van een lijn $m$ door het punt $P$ is $y-4=k(x-6)$.
We herschrijven de vergelijking van $c$ als $(x-1)^{2}+(y-3)^{2}=13$.
Dit stelt een cirkel voor met middelpunt $M(1, 3)$ en straal $\sqrt{13}$ .
$m$ raakt juist dan aan $c$ als $d\left(m, M\right)=\sqrt{13}$ .
Volgende de formule van Hesse is dit gelijkwaardig aan $\frac{\left| k ∙ 1 – 3+ 4 – 6 ∙ k \right| }{\sqrt{k^{2}+ 1}} $ $=$ $\sqrt{13}$ .
$\frac{\left| 1 - 5k \right| }{\sqrt{k^{2}+ 1}}$ $=$ $\sqrt{13}$ , (kwadrateren) $(1-5k)^{2}=13\left(k^{2}+1\right)$ , $12k^{2}-10k-12=0$ ,
$6k^{2}-5k-6=0$ . $D=(-5)^{2}-4∙6∙\left(-6\right)=169$. De oplossingen zijn $k= $ $\frac{5 \pm 13}{12}$ , dus
$k=1\frac{1}{2} ∨ k=-\frac{2}{3}$ . De vergelijkingen van de gezochte raaklijnen zijn
$y-4=1\frac{1}{2}(x-6)$ en $y-4=-\frac{2}{3}(x-6)$ , oftewel $3x-2y=10$ en $2x+3y=24$.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 6**Gegeven is de ellips$e: 2x^{2}+y^{2}-4x-4y-11=0$. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan $e$ die gaan door het punt $P(6, 1)$.**Oplossing**De vergelijking van de poollijn $p$ van $P$ t.o.v. $e$ is $2∙6∙x+1∙y-2\left(x+6\right)-2\left(y+1\right)-11=0$, dus $p: y=10x-25$. Dit invullen in de vergelijking van $e$ geeft:$2x^{2}+\left(10x-25\right)^{2}-4x-4\left(10x-25\right)-11=0$ , $102x^{2}-544x+714=0$ , $3x^{2}-16x+21=0$.$D=(-16)^{2}-4∙3∙21=4$. |  |

De oplossingen zijn $x=\frac{16 \pm 2}{6}$ , dus $x=3 ∨ x=2\frac{1}{3}$ . De bijbehorende raakpunten zijn
$R\_{1}(3, 5)$ en $R\_{2}\left(2\frac{1}{3},-1\frac{2}{3}\right).$ De raaklijnen aan $c$ in deze twee punten zijn:
$r\_{1}: 2∙3∙x+5∙y-2\left(x+3\right)-2\left(y+5\right)-11=0$ , dus $r\_{1}: 4x+3y=27$en
$r\_{2}: 2∙2\frac{1}{3}∙x-1\frac{2}{3}∙y-2\left(x+2\frac{1}{3}\right)-2\left(y-1\frac{2}{3}\right)-11=0 , dus r\_{2}: 8x-11y=34$.

**Voorbeeld 7**Gegeven is de (scheve) ellips $e: x^{2}+4xy+9y^{2}-10x-46y=24$.
Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan $e$ die gaan door het punt $P(-5, 11)$. **Oplossing**De vergelijking van de poollijn $p$ van $P$ t.o.v. $e$ is
$-5x+2\left(11x-5y\right)+9∙11y-5\left(x-5\right)-23\left(y+11\right)=24$, dus $p: 2x+11y=42$. Substitutie van $2x=42-11y$ in de vergelijking $\left(2x\right)^{2}+16xy+36y^{2}-40x-184y=96$ geeft:
$\left(42-11y\right)^{2}+8\left(42-11y\right)y+36y^{2}-20\left(42-11y\right)-184y=96$,
$1764-924y+121y^{2}+336y-88y^{2}+36y^{2}-840+220y-184y-96=0$,
 $69y^{2}-552y+828=0$, $y^{2}-8y+12=0$, $\left(y-6\right)\left(y-2\right)=0$, $y=6 ∨ y=2$.
De bijbehorende raakpunten zijn $R\_{1}(-12, 6)$ en $R\_{2}\left(10, 2\right).$
De raaklijnen aan $c$ in deze twee punten zijn:
$r\_{1}: -12x+2\left(6x-12y\right)+9∙6y-5\left(x-12\right)-23\left(y+6\right)=24$, dus $r\_{1}: -5x+7y=102 $ en
$r\_{2}: 10x+2\left(2x+10y\right)+9∙2y-5\left(x+10\right)-23\left(y+2\right)=24$, dus $r\_{2}: 3x+5y=40$.



**Voorbeeld 8**Gegeven is de (scheve) parabool $K: x^{2}+2xy+y^{2}+8x+2y=12$.
Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan $K$ die gaan door het punt $P(3, -6)$.

**Oplossing**De vergelijking van de poollijn $p$ van $P$ t.o.v. $K$ is
$3x+\left(3y-6x\right)-6y+4\left(x+3\right)+\left(y-6\right)=12$, dus $p: x=2y+6$. Dit invullen in de verg. van $K$:
$\left(2y+6\right)^{2}+2\left(2y+6\right)y+y^{2}+8\left(2y+6\right)+2y=12$, $9y^{2}+54y+72=0$, $y^{2}+6y+8=0$.
Dit geeft $y=-2 ∨ y=-4$. De twee raakpunten zijn $R\_{1}(2,-2)$ en $R\_{2}(-2,-4)$. De bijbehorende raaklijnen zijn: $r\_{1}: 4x+y=6$ en $r\_{2}: 2x+5y=-24$.



**Appendix**Er is ook een andere manier om de vergelijking van een raaklijn te bepalen aan een kromme
$K: ax^{2}+bxy+cy^{2}+ex+fy+g=0$ in een punt $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$ op $K$. De letter $d$ gebruiken we hier niet omdat we deze reserveren voor de differentialen die we gaan gebruiken.
Deze methode is ook op meer algemene krommen toepasbaar.
Uit $ax^{2}+bxy+cy^{2}+ex+fy+g=0$, volgt $d(ax^{2}+bxy+cy^{2}+ex+fy+g)=d0$
(de $d$ betekent hier ‘differentiaal’), $2axdx+b\left(xdy+ydx\right)+2cydy+edx+fdy=0$,
$\left(2ax+by+e\right)dx=-\left(2cy+bx+f\right)dy$, $\frac{dy}{dx}$ $=- $ $\frac{2ax + by + e}{2cy + bx + f} $.
De vergelijking van de raaklijn $r$ aan $K$ in $A$ is daarom
$r: y-y\_{A}=- \frac{2ax\_{A} + by\_{A} + e}{2cy\_{A} + bx\_{A}+ f}$ $(x-x\_{A})$. We herleiden deze vergelijking.
$\left(2ax\_{A}+by\_{A}+e\right)\left(x-x\_{A}\right)+\left(y-y\_{A}\right)\left(2cy\_{A}+bx\_{A}+f\right)=0$ ,
$2axx\_{A}+by\_{A}x+byx\_{A}+2cyy\_{A}+ex+fy-\left(2a\left(x\_{A}\right)^{2}+2bx\_{A}y\_{A}+2c\left(y\_{A}\right)^{2}+ex\_{A}+fy\_{A}\right)=0$ (\*).
Omdat $A\left(x\_{A},y\_{A}\right)$ op $K$ ligt, geldt er dat $2a\left(x\_{A}\right)^{2}+2bx\_{A}y\_{A}+2c\left(y\_{A}\right)^{2}+ex\_{A}+fy\_{A}=-ex\_{A}-fy\_{A}-2g$.
Bijgevolg is (\*) te herschrijven als
$2axx\_{A}+by\_{A}x+ex+2cyy\_{A}+byx\_{A}+fy+ex\_{A}+fy\_{A}+2g=0$, oftewel
$ax\_{A}x+\frac{1}{2}b\left(y\_{A}x+x\_{A}y\right)+cy\_{A}y+\frac{1}{2}e\left(x+x\_{A}\right)+\frac{1}{2}f\left(y+y\_{A} \right)+g=0$.
Dit komt overeen met het eerder gevonden resultaat.