**Wortelvergelijkingen**Een **wortelvergelijking** is een vergelijking waarin een of meer worteltermen voorkomen.
We zullen een aantal voorbeelden bekijken en de oplossingmethode aangeven.

**Voorbeeld 1**
Los op: $x+\sqrt{x}=6 $. **(1)**
We proberen de wortelterm weg te werken. Een bekende zeer ernstige fout is het apart kwadrateren van elke term in (1), zodat je krijgt: $x^{2}+\left(\sqrt{x}\right)^{2}= 6^{2}$ , $x^{2}+x= 36$.
Dit is fout omdat uit $a+b=c $ *niet* volgt dat $a^{2}+b^{2}=c^{2}$
(voorbeeld: $2+3=5$ maar $2^{2}+3^{2}\ne 5^{2}$).
De goede manier is om de term die de wortel bevat apart te zetten, oftewel te **isoleren**.
We herschrijven daarom **(1)** als:
$\sqrt{x}=6-x$. **(2)**
Vervolgens **kwadrateren** we beide zijden (denk hierbij aan de haakjes!):
$\left(\sqrt{x}\right)^{2}=\left(6-x\right)^{2}$,dus $x=36-12x+x^{2}$ , $x^{2}-13x+36=0$ ,
$\left(x-4\right)\left(x-9\right)=0$ , $x=4 ∨ x=9$.
We hebben dus twee oplossingen gevonden. Nu blijkt het algemeen zo te zijn dat er na het kwadrateren een vergelijking ontstaat die meer oplossingen kan hebben dan de oorspronkelijke vergelijking. De reden hiervoor zullen we verderop uitleggen.
We moeten daarom **controleren** of de gevonden oplossingen voldoen aan **(1)**.
$4+\sqrt{4}=6$ , dus $ x=4$ voldoet; $9+\sqrt{9}\ne 6$ , dus $x=9$ voldoet niet.

Samenvattend verloopt de oplossing dus als volgt.
$x+\sqrt{x}=6$ ; **isoleren**: $\sqrt{x}=6-x$ , **kwadrateren**: $\left(\sqrt{x}\right)^{2}=\left(6-x\right)^{2}$, $x=36-12x+x^{2}$ , $x^{2}-13x+36=0$ , $\left(x-4\right)\left(x-9\right)=0$ , $x=4 ∨ x=9$ ;
**controleren** leert dat alleen $x=4$ voldoet.
We leggen nu uit waarde oplossing $x=9$ (die niet blijkt te voldoen) vandaan komt.
Stel dat we in plaats van **(2)** de vergelijking
$-\sqrt{x}=6-x$ **(3)**moesten oplossen. Na het kwadrateren komen we uit op $\left(-\sqrt{x}\right)^{2}=\left(6-x\right)^{2}$, dus
$x=36-12x+x^{2}$ . Dit is dezelfde vergelijking als die uit **(2)** na kwadrateren was ontstaan
(het min-teken voor de wortel valt na het kwadrateren weg). De vergelijking $x=36-12x+x^{2}$ bevat daarom zowel de oplossingen van **(2)** als van **(3)**. We zien dat $x=9$ aan **(3)** voldoet en dit is de reden dat we $x=9$ vinden als een oplossing (die niet voldoet aan **(1)**) van de vergelijking die ontstaat als we **(2)** kwadrateren.

**Voorbeeld 2**Los op: $2\sqrt{2x-1}-x=1$ . **(4)**
**isoleren**: $2\sqrt{2x-1}=x+1$ , **kwadrateren**: $\left(2\sqrt{2x-1}\right)^{2}=(x+1)^{2}$ ,
$4\left(2x-1\right)=x^{2}+2x+1$ , $x^{2}-6x+5$ = 0 , $\left(x-1\right)\left(x-5\right)=0$ , $x=1 ∨ x=5$;
**controleren**:
$2\sqrt{2∙1-1}-1=2\sqrt{1}-1=2⋅1-1=1$, dus $x=1$ voldoet aan **(4)** ;
$2\sqrt{2∙5-1}-5=2\sqrt{9}-5=2⋅3-5=1$, dus $x=5$ voldoet aan **(4)**.

**Voorbeeld 3**Los op: $3\sqrt{6-x}+8=x$ . **(5)**
**isoleren**: $3\sqrt{6-x}=x-8$ , **kwadrateren**: $\left(3\sqrt{6-x}\right)^{2}=\left(x-8\right)^{2}$ ,
$9\left(6-x\right)=x^{2}-16x+64$ , $x^{2}-7x+10=0$ , $ \left(x-2\right)\left(x-5\right)=0$ , $x=2 ∨ x=5$;
**controleren**:
$3\sqrt{6-2}+8=3⋅2+8=14\ne 2$ , dus $x=2$ voldoet niet aan **(5)** ;
$3\sqrt{6-5}+8=3⋅1+8=11\ne 5$ , dus $x=5$ voldoet niet aan **(5)** .

Bij de bovenstaande drie voorbeelden kwamen we na kwadrateren steeds uit op een tweedegraadsvergelijking met twee oplossingen. Bij voorbeeld 1 voldoet één van de oplossingen, bij voorbeeld 2 voldoen beide oplossingen en bij voorbeeld 3 voldoet geen van de oplossingen aan de oorspronkelijke vergelijking.
Alle opties zijn kennelijk mogelijk!

 **Voorbeeld 4**Los op:$x^{3}-9x\sqrt{x}+8=0$ **(6)**
We geven twee oplossingsmethoden. **Methode 1
isoleren**: $x^{3}+8=9x\sqrt{x}$, **kwadrateren**: $\left(x^{3}+8\right)^{2}=\left(9x\sqrt{x}\right)^{2}$, $x^{6}+16x^{3}+64=81x^{3}$ , $x^{6}-65x^{3}+64=0$ ; Stel $x^{3}=p$ dan krijgen we $p^{2}-65p+64=0$, $\left(p-1\right)\left(p-64\right)=0$ , $p=1 ∨ p=64$. Dit geeft $x^{3}=1 ∨ x^{3}=64$ , $x=\sqrt[3]{1}=1 ∨ x=\sqrt[3]{64}=4$ .
**controleren**:
$1^{3}-9⋅1∙\sqrt{1}+8=1-9+8=0$ , dus $ x=1$ voldoet aan **(6)** ;
$4^{3}-9⋅4∙\sqrt{4}+8=64-72+8=0$ , dus $ x=4$ voldoet aan **(6)**.

**Methode 2**
We herkennen $x^{3}$ als het kwadraat van $x\sqrt{x}$ en daarom stellen we $p=x\sqrt{x}$.
Dan gaat **(6)** over in: $p^{2}-9p+8=0$ , $\left(p-1\right)\left(p-8\right)=0$ , $p=1 ∨ p=8$.
I) $x\sqrt{x}=1$ , **kwadrateren**: $\left(x\sqrt{x}\right)^{2}=1^{2}$, $x^{3}=1$ , $x=\sqrt[3]{1}=1$ ;
 **controleren**: $1⋅\sqrt{1}=1$ , dus de oplossing $x=1$ voldoet (opmerking: we hoeven de
 oplossing $x=1$ slechts te controleren voor de vergelijking $ x\sqrt{x}=1$ en niet voor de
 oorspronkelijke vergelijking **(6)** ).
II) $x\sqrt{x}=8$ , **kwadrateren**: $\left(x\sqrt{x}\right)^{2}=8^{2}$, $x^{3}=64$ , $x=\sqrt[3]{64}=4$ ;
 **controleren**: $4⋅\sqrt{4}=8$, dus de oplossing $x=4$ voldoet.

**Opmerking**
Methode 2 in voorbeeld 4 is wat eenvoudiger dan methode 1 en is te prefereren.
Bovendien kunnen in methode 1 na het kwadrateren vrij grote getallen voorkomen wat het algebraïsch oplossen lastiger maakt.

**Voorbeeld 5**
Los op: $x^{5}-x^{2}\sqrt{x}=2$ **(7)**
We herkennen $x^{5}$ als het kwadraat van $x^{2}\sqrt{x}$ , dus we stellen $x^{2}\sqrt{x}=p$ , waardoor **(7)** overgaat in $p^{2}-p-2=0$ , $\left(p-2\right)\left(p+1\right)=0$ , $p=2 ∨ p=-1$ .
I) $x^{2}\sqrt{x}=2$ , **kwadrateren**: $\left(x^{2}\sqrt{x}\right)^{2}=1^{2}$, $x^{5}=4$ , $x=\sqrt[5]{4}$ ;
 **controleren**: $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{2}\sqrt{\sqrt[5]{4}}= $2 , dus $x=\sqrt[5]{4}$ voldoet
II) $x^{2}\sqrt{x}=-1$ ; deze vergelijking heeft geen oplossing om de volgende reden: $x^{2}$ en $\sqrt{x}$ zijn
 beide $\geq 0$ , dus ook $ x^{2}\sqrt{x} \geq 0$ en daarom kan $x^{2}\sqrt{x}$ voor geen enkele $x$ gelijk zijn aan $-1$.

Bij een vergelijking van de vorm $A\sqrt{B}+C\sqrt{D}=E$ moet je meestal twee keer isoleren, twee keer kwadrateren en daarna nog controleren.

**Voorbeeld 6**
Los op: $2\sqrt{3x+1}- 3\sqrt{x-4}=5$.
Zet eerst één van de worteltermen apart.
**isoleren**: $2\sqrt{3x+1}= 3\sqrt{x-4}+5$ ,
**kwadrateren**: $\left(2\sqrt{3x+1}\right)^{2}=\left(3\sqrt{x-4}+5 \right)^{2}$, $4\left(3x+1\right)= 9\left(x-4\right)+30\sqrt{x-4}+25$ ,
**isoleren**: $15+3x=30\sqrt{x-4}$ , beide leden door 3 delen: $5+x=10\sqrt{x-4}$ ,
**kwadrateren**: $\left(5+x\right)^{2}=\left(10\sqrt{x-4}\right)^{2}$ , $x^{2}+10x+25= 100(x-4)$ , $x^{2}-90x+425=0$ , $\left(x-5\right)\left(x-85\right)=0$ , $x=5 ∨ x=85$ ;
**controleren:**
$2\sqrt{3∙5+1}- 3\sqrt{5-4}=2⋅4-3⋅1=5$ , dus $x=5$ voldoet ;
$2\sqrt{3∙85+1}- 3\sqrt{85-4}=2∙16-3⋅9=5$ , dus $x=85$ voldoet.