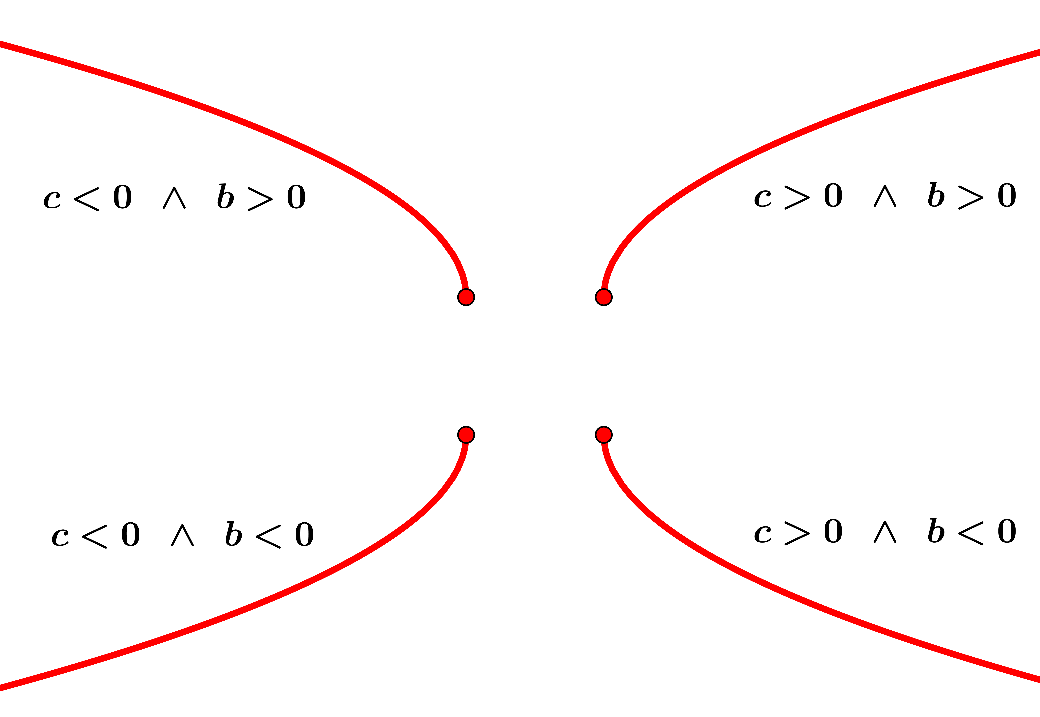
**Grafieken van wortelfuncties**We bekijken grafieken van functies waarin worteluitdrukkingen voorkomen.  
Wat ons vooral interesseert is het **domein** van en de **vorm van de grafiek** van dergelijke functies.  
Daartoe bekijken we een aantal voorbeelden.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 1**  . Het domein wordt gevonden door op te lossen: . De oplossing is .  Dit geeft . Het punt is het **beginpunt** van de grafiek. Je vindt dit door in de functie de randwaarde van het domein in te vullen: ;  de worteluitdrukking wordt altijd nul in de rand van het domein. |  |

De grafiek een functie , waarbij en constanten zijn (met ), is een halve parabool die over gedraaid is. De grafiek heeft daarom een **verticale raaklijn** in het beginpunt. Zie de figuur hieronder voor de parabool die hoort bij de grafiek van .

|  |  |
| --- | --- |
| De grafiek van krijg je door de grafiek van (een halve parabool) over te draaien (in wijzerzin) om het punt . De formule van is:  , waarbij . Het gestreepte gedeelte maakt geen deel uit van de grafiek, maar dient slechts om het parabolisch karakter te illustreren.  Zie Appendix voor het bewijs dat de grafiek van  (met )  een halve gedraaide parabool is, |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 2**  . Voor het domein moeten we oplossen , , . Dit geeft: . , dus het beginpunt van de grafiek van is . |  |

Laten we nu een algemene wortelfunctie van de vorm beschouwen (.  
Het domein van wordt bepaald door op te lossen , . Hieruit volgt dat  
, als en , als . Hiermee is gevonden:  
, als en , als .  
Het beginpunt van de grafiek van is het punt . De - waarde van dit punt is altijd gelijk aan het randgetal van het domein van .  
De vorm van de grafiek van hangt af van de tekens van de getallen en .  
We geven hieronder een overzicht.  
****  
De grafiek loopt vanaf het beginpunt naar rechts als en naar links als .  
Aan de schets zien we ook dat het bereik van gelijk is aan , als en , als .  
  
We bekijken nu grafieken van functies van de vorm . Het karakter van de grafiek wordt bepaald door het teken van en het teken van de discriminant   
van .

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 3**  .  Hier geldt dat en . Het domein vinden we door op te lossen  , .  De oplossing is .  Het domein bestaat uit twee gedeelten: het interval ] en het interval  . Dit wordt als volgt genoteerd:  .  De grafiek staat hiernaast getekend. |  |

De grafiek nadert links tot de lijn (als ) en rechts tot de lijn   
(als ). Deze twee lijnen heten **scheve asymptoten** van de grafiek van .  
We zullen deze asymptoten toelichten. Kwadraatafsplitsen geeft: .  
Als heel groot is, dan geldt dat nagenoeg gelijk is aan .  
Neem b.v. ; dan en . Algemeen geldt het volgende : als een heel groot getal is en een klein getal (t.o.v. ), dan . De reden hiervoor is dat de functie steeds zwakker stijgt voor toenemende waarden van . Dit is ook grafisch in te zien: de grafiek van loopt steeds vlakker als we ons ver naar rechts op -as bevinden.   
Nu geldt dat .   
Uit deze beschouwingen blijkt dat grafiek van nadert tot de lijn als en nadert tot de lijn als .  
Er valt nog meer te zeggen over de grafiek van . Stel .

|  |  |
| --- | --- |
| Evident is dat . Kwadrateren geeft:  , , dus . Dit is een translatie van de kromme . Deze vergelijking is een speciaal geval van de vergelijking (met en ). Hier staat de vergelijking van een **hyperbool** . Deze bestaat uit alle punten waarvoor geldt dat , waarbij  en , met . De twee punten en heten de **brandpunten** van de hyperbool. De twee gedeelten van de |  |

grafiek heten de **takken** van de hyperbool. De twee lijnen met vergelijking en   
 zijn de scheve asymptoten van . Zoals hierboven gezien geldt voor de punten van de grafiek van : en . Dit betekent dat de grafiek van de bovenste helft van een (verschoven) hyperbool is. We merken op dat de twee scheve asymptoten en  
 loodrecht op elkaar staan, maar dit hoeft niet algemeen te gelden.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 4**  . Hier geldt dat en . Voor het domein moet gelden: , ,  , . Dit geeft: .  Uit blijkt dat  , als heel groot is. De scheve asymptoten van de grafiek van zijn daarom (rechts) en  (links). Hier staan de asymptoten *niet* loodrecht op elkaar. De reden is dat . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 5**  . Hier geldt dat en . Uit deze twee betrekkingen volgt dat het kwadraat is van  een eerstegraadsfunctie: . Dit geeft: . Het domein van is , de verzameling van alle reële getallen. Het voorschrift van zonder absolute waarde tekens is . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 6**  . Hier geldt dat en . De parabool ligt geheel boven de -as, dus voor alle . Dit betekent dat .  als heel groot is. De scheve asymptoten van de grafiek van zijn daarom (rechts) en (links). Stel nu dat . Dan en . Dit is te herschreven als: |  |

. Hier staat de vergelijking van een hyperbool waarvan de brandpunten op de verticale lijn liggen. De grafiek van is de bovenste tak van deze hyperbool.

|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 7**  . Hier geldt dat en . We bepalen eerst het domein, dus op te lossen  , ,  , . Derhalve . Stel . |  |

Dan en , , .  
Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt en straal . Omdat voor de punten op de grafiek van , stelt de grafiek van de bovenste helft van deze cirkel voor.

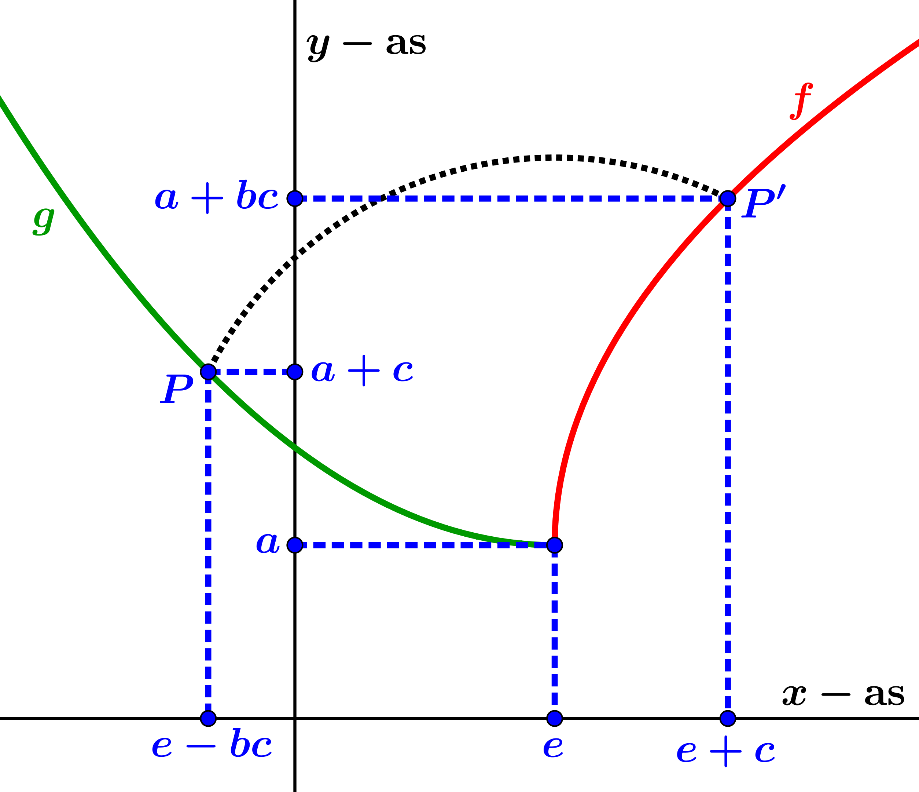
|  |  |
| --- | --- |
| **Voorbeeld 8**  . Hier geldt dat en . Voor het domein moet gelden  , , . Dit geeft: . Stel . Dan geldt dat en , ,  , . |  |

Dit is een verschoven speciale versie van de volgende algemene kromme: , waarbij , en . Deze kromme stelt een **ellips** voor. Er bestaan twee punten en zodanig dat voor elk punt van geldt: , waarbij een constante is.  
Deze constante is gelijk aan in het geval en gelijk aan in het geval .  
Als , dan zijn de brandpunten en , waarbij .  
Als , dan zijn de brandpunten en , waarbij .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

hier geldt ; hier geldt ;   
  
De grafiek van is de bovenste helft van een ellips waarvan de brandpunten op de verticale lijn  
 liggen  
  
  
**Appendix A**  
We zullen gaan aantonen dat de grafiek van , waarbij , een halve gedraaide parabool is.

|  |  |
| --- | --- |
| Daartoe moeten we eerst begrijpen hoe de coördinaten van een punt veranderen als we dit punt onderwerpen aan een rotatie van 90° in wijzerzin rondom de oorsprong . Bekijk de figuur hiernaast. Het punt gaat door een rotatie over 90° in wijzerzin over in het punt .   is de loodrechte projectie van op de -as en  is de loodrechte projectie van op de -as. Merk op dat , en  . Hieruit volgt dat   (ZHH congruentiekenmerk). |  |

Dit impliceert: en .  
Deze betrekking geldt niet alleen als in het eerste kwadrant ligt, maar ook voor de overige kwadranten, zoals men eenvoudig controleert.  
We schrijven het voorschrift in de vorm ,   
waarbij . Er zijn verschillende tekencombinaties van de optredende constanten mogelijk.   
We zullen hier aannemen dat en . De andere gevallen verlopen vrijwel analoog.   
Merk op dat . Beschouw de functie gegeven door , waarbij . De grafiek van is een halve parabool. We zullen aantonen dat bij een rotatie om het punt in wijzerzin over de grafiek van overgaat in de grafiek van . We passen op beide grafieken de translatie ) toe. De grafiek van gaat over in de grafiek van de functie , waarbij met en de grafiek van gaat over in de grafiek van de functie , waarbij met .   
Ter afkorting noemen we R rotatie om in wijzerzin over .  
 Het is voldoende om aan te tonen dat door R de grafiek van overgaat in de grafiek van .   
Voor de punten van de grafiek van geldt: . Door R gaat het punt over in het punt , waarbij en . Door te substitueren en gaat de betrekking over in . Hieruit volgt dat .   
Vanwege (omdat , voor alle punten van de grafiek van ), volgt er dat , dus . Hieruit blijkt dat alle punten op de grafiek van liggen.   
Het bovenstaande leert dat een willekeurig punt van de grafiek van door R wordt afgebeeld op het punt dat op de grafiek van ligt. (\*)  
Er dient nog aangetoond worden dat bij R elk punt van de grafiek van het beeld is van een punt   
van de grafiek van . Neem een willekeurig punt van de grafiek van . Dan geldt dat  
, en . Er volgt dat , dus . Dan geldt ook dat .  
Omdat , volgt hieruit dat het punt op de grafiek van ligt.   
Gelet op (\*) wordt dit punt door R afgebeeld op het punt van de grafiek van   
Hiermee is het bewijs voltooid.  
  
We zullen nog motiveren hoe we de formule van gevonden hebben.  
Neem aan dat de grafiek van ontstaat door de rotatie om over in wijzerzin van een halve parabool. Bij deze parabool hoort een functie met een voorschrift van de vorm  
, waarbij een nader te bepalen constante is en ; de top van de (halve) parabool is immers het punt .  
Er geldt dat .  
Door het punt op de grafiek van terug te draaien over in tegenwijzerzin krijg je het punt op de grafiek van . Zie de figuur hieronder.  
****  
Er geldt daarom dat  
, , dus .  
Hiermee is gevonden: .