**Oplossen van differentiaalvergelijkingen**Een **differentiaalvergelijking** (DV) is een vergelijking waarin een (mogelijk hogere) afgeleide van een onbekende functie en ook mogelijk die functie zelf voorkomt. In zo’n vergelijking kunnen ook meerdere afgeleiden (van verschillende orde) voorkomen.
De onbekende functie kunnen we bijvoorbeeld noteren als , , of .
We geven een aantal voorbeelden van differentiaalvergelijkingen (DV - en).
(1):
(2):
(3):
(4):
(5):
(6):
(7):

Als de hoogste afgeleide van de onbekende functie die voorkomt in de DV de afgeleide is, dan zeggen we dat de DV van **orde** is. De ordes van de DV - en van de bovenstaande voorbeelden zijn achtereenvolgens 1, 2, 2, 1, 3, 2, 3. In de eerste drie DV - en zijn de coëfficiënten van de afgeleiden en de functie zelf constanten. We spreken dan van een DV met **constante coëfficiënten**.
Een DV met de volgende twee eigenschappen heet een **lineaire** DV:
a) de optredende afgeleiden en eventueel de functie zelf komen slechts tot de eerste graad voor;
b) de coëfficiënten van de optredende afgeleiden en eventueel de functie zelf zijn constanten of
 functies van de onafhankelijke variabele.
De eerste vier DV - en van de bovenstaande voorbeelden zijn lineaire DV - en.
Differentiaalvergelijkingen komen voor in de wiskunde en natuurkunde vaak voor. Een DV proberen we op te lossen, d.w.z. we proberen de functie te vinden die aan die vergelijking voldoet. In veel gevallen is het algebraïsch oplossen van een DV onmogelijk.
Je kunt dan hoogstens een oplossing benaderen met numerieke methoden.
Deze methoden komen hier niet aan bod.

We beschouwen eerst een speciaal type DV waarvan de oplossing algebraïsch te bepalen is.

**A) Lineaire DV van orde 1 met scheidbare variabelen**
Hiermee bedoelen we een DV van de vorm: (1)

Deze vergelijking is te herschrijven als . (2)
We proberen voor een functie te vinden zodanig dat aan (2) is voldaan, dus ook aan
 . (3)
Dit moet gelden voor alle uit een zeker interval.
De primitieven van de functies in het linkerlid en het rechterlid van (3) moeten dan ook aan elkaar gelijk zijn, dus
.
Substitueren we in de linkerintegraal, dan krijgen we (substitutieregel):
 (4)
Als een primitieve is van en een primitieve is van , dan volgt uit (4) dat
, waarbij een willekeurige constante is. (5)
In bepaalde gevallen kan in (5) de variabele vrijgemaakt worden en uitgedrukt worden in .
We eindigen dan met een betrekking van de vorm en dit is dan een expliciete oplossing
van de DV (1).

**Opmerkingen**
a) Soms is het niet mogelijk om de primitieven van de uitdrukkingen binnen de integralen in (4)
 te bepalen. In dit geval ziet men de betrekking in (4) als de oplossing in integraalvorm van DV (1).
b) Het is niet altijd mogelijk om in (5) de variabele op te lossen. We zien dan de betrekking in (5) als een relatie tussen en Dit stelt dan een of andere kromme voor in het platte vlak en wordt dan een **oplossingskromme** genoemd.
c) We kunnen (4) sneller verkrijgen uit (2). Daartoe vatten we in (2) de term niet alleen op als een symbool voor de afgeleide van naar , maar ook als een gewone breuk gevormd door de **differentialen** en . Men kan opvatten als een oneindig kleine is en als de bijbehorende oneindig kleine Dit is gebaseerd op de definitie van de afgeleide:
 .
Het werken met differentialen passen we ook toe bij het impliciet differentiëren van een kromme.
Als we op deze manier interpreteren dan is (2) te herschrijven tot .
Door beide leden te integreren komen we tot (4).
Dit is een soort symbolisch rekenen dat snel tot de correcte oplossing van de DV voert.
d) In (4) komt in het linkerlid alleen de variabele en in het rechterlid alleen de variabele voor.
We hebben hiermee de variabelen en gescheiden van elkaar.
e) In plaats van (4) kunnen we natuurlijk ook nemen
f) In de oplossing van de DV komt een integratieconstante voor.
Door te eisen dat deze oplossing door een bepaald punt gaat kunnen we berekenen.

**Voorbeeld 1** .
 , , , ,
 (.  **Voorbeeld 2**
.
 , , ,
, ( ,
 .

**Voorbeeld 3**
 .
 , ,
 , (.
De integraalkrommen (met ) stellen concentrische cirkels voor met middelpunt

**Voorbeeld 4**
.
 , , ,
, , ,
, (.

**B) Lineaire homogene DV van orde 1**
Dit is een DV van de vorm: .
Deze is te herschrijven als , en laat zich eenvoudig oplossen: , ( is een primitieve van ), ,
 , . Hierbij is . Het getal kan elke positieve waarde aannemen als alle mogelijke constante waarden doorloopt, dus kan dan elke reële waarde ongelijk aan nul aannemen. Echter is ook toegestaan, want dan krijg je :
de functie die voor elke waarde van gelijk is aan nul en deze functie voldoet aan de DV
. Een speciaal geval krijg je als een constante functie is.
Je hebt dan de DV , waarbij een constante is.
De oplossing van de DV is in dit geval .

**Voorbeeld 5**

 .

**Voorbeeld 6**

 .

**C) Lineaire inhomogene DV van orde 1**
Dit is een DV van de vorm: met niet constant gelijk aan nul. (6)
We zullen een methode aangeven om een dergelijke DV op te lossen.
We weten reeds dat de oplossing van de homogene DV is:
 , waarbij een constante is en een primitieve is van .
Van de DV in proberen we een oplossing te vinden van de vorm
, waarbij een nader te bepalen functie van is.
.
Er moet dus gelden dat , oftewel
, . Hieruit volgt door integratie
. We hebben hiermee gevonden:
De algemene oplossing van de DV is
 , waarbij een primitieve is van . (7)

**Opmerkingen**
a) Voor nemen we een van de primitieven van ; de integratieconstante hoeven we niet op te schrijven.
b) Als we bepalen, dan moeten we ook de integratieconstante opschrijven.
c) Soms verlangen we een oplossing van de DV in (6) die voldoet aan een zekere **beginvoorwaarde** . Aan deze beginvoorwaarde kan vaak voldaan worden door voor de integratieconstante een geschikte waarde te nemen.
d) De primitieve van is lang niet altijd te bepalen. We zien dan (7) als een oplossing van de DV in integraalvorm.
e) Als een constante functie is, d.w.z. als de DV van de vorm is, waarbij een getal is, dan is vaak een eenvoudiger aanpak mogelijk, die we onder D) zullen beschrijven.

**Voorbeeld 7** (.
De DV is te herschrijven als (.
Dit is van het type in (6) met en .
Een primitieve van is (want ). De oplossing van de DV is dus

 .

**Voorbeeld 8**.

Een primitieve van is . De oplossing van de DV is
 .

**Voorbeeld 9**

Volgens (7) is de oplossing van de DV:
 , waarbij
Tweevoudige partiële integratie geeft:
 ∙.
Hieruit volgt dat , dus
 .
 geeft , dus en .

**Voorbeeld 10**
.
Volgens (7) is de oplossing van de DV:

..

**D) Lineaire inhomogene DV van orde 1 met een constante coëfficiënt van de term .**Hiermee bedoelen we een DV van de vorm . (8)
waarbij een constante is. Deze kan met de algemene methode van C) worden aangepakt, maar we zullen nu een andere oplossingsmethode aangeven .
De DV is de bijbehorende *homogene* DV van (8). De algemene oplossing hiervan is
 (zie zo nodig B) ).
Een functie die aan (8) voldoet heet een **particuliere oplossing** en we zullen die noteren als .
Beschouw nu een functie van de vorm . Deze voldoet aan de DV in (8), want
 .
Omgekeerd, stel dat een oplossing is van (8). Dan geldt voor de functie :
, dus is een oplossing van de bijbehorende homogene DV. Er volgt dat , dus voor een zekere oplossing van de homogene DV.
Dit alles leert dat de algemene oplossing van (8) gegeven wordt door
 , waarbij een particuliere oplossing is en een constante.
We zullen nu aangeven hoe we voor een aantal situaties een particuliere oplossing kunnen vinden
van de DV . Zie de volgende tabel (vanaf de regel zijn alle letters ≠ constanten).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|  |  ( is een primitieve van ) |

De resultaten uit deze tabel zijn m.b.v. de formule in (7) te motiveren. We illustreren dit voor de laatste regel in de tabel. We hebben dus een DV van de vorm .
Toepassen van (7) geeft: .

De tabel leert bijvoorbeeld dat als , er een particuliere oplossing van de vorm is. De waarden van en kunnen bepaald worden door deze oplossing in de DV te substitueren en daarna de coëfficiënten van gelijksoortige termen aan elkaar gelijk te stellen. We zullen voor een aantal gevallen uit de tabel een voorbeeld geven.
**Voorbeeld 11**
 (9)
 is een constante, dus we proberen een particuliere oplossing van de vorm , waarbij een constante is. Invullen in de DV geeft. , dus . De algemene oplossing van de homogene DV is , dus de algemene oplossing van (9) is .

**Voorbeeld 12**
 . (10)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm . Invullen in (10) geeft:
 . Hieruit volgt: ,
dus en . De algemene oplossing van (10) is daarom .

**Voorbeeld 13**
 met (11)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm . Invullen in (11) geeft:
 , dus
.
Dit moet geldig zijn voor alle waarden van en dat kan alleen het geval zijn als de coëfficiënten van de machten van allemaal gelijk zijn aan nul, d.w.z.
 . We vinden hieruit direct dat
 , en . De algemene oplossing van (11) is daarom
 .
 geeft , dus . Dit geeft de oplossing
.

**Voorbeeld 14**
. (12)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
Invullen in (12) geeft:
.
Er volgt dat . Oplossen leidt tot en
De algemene oplossing van (12) is dus .

**Voorbeeld 15**
. (13)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm . Invullen in (13) geeft:
 en dit impliceert dat , dus .
De algemene oplossing van (13) is

**Voorbeeld 16**
. (14)
De factor in de term is gelijk aan de factor in de exponent van de term .
Toepassen van de laatste regel in de tabel op pag. 6 geeft als algemene oplossing van (14):
.

**Opmerkingen**
a) Als we in (14) een particuliere oplossing van de vorm zouden proberen, dan geeft dit na invullen in de DV: , maar hieraan kan duidelijk door geen enkele worden voldaan.
b) De algemene oplossing van de DV is .
Dit blijkt op een analoge manier als in de oplossing van de DV in (14).

**Voorbeeld 17**
 (15)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm . Invullen in (15) geeft:
 . Er moet gelden dat
 . Oplossen geeft en .
De algemene oplossing van (15) is .

**Voorbeeld 18**
 met (16)
De factor in de term is gelijk aan de factor in de exponent van de term .
Toepassen van de laatste regel in de tabel op pag. 6 geeft als algemene oplossing van (16):
.
 geeft ), dus .
De oplossing van (16) is .

**Voorbeeld 19**
. (17)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
Invullen in (17) geeft:

en hieruit volgt: .
Dit levert , en .
De algemene oplossing van (17) is .

**Voorbeeld 20**
. (18)
De factor in de term is gelijk aan de factor in de exponent van de term .
Toepassen van de laatste regel in de tabel op pag. 6 geeft als algemene oplossing van (16):
 .

**Voorbeeld 21**
 . (19)
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
Invullen in (19) geeft (na deling door ) :

 en dit impliceert dat
, oftewel .
Hieruit vinden we eenvoudig dat en . De oplossing van (19) is daarom:
 .

**E) DV van het type ( en zijn constanten,**  **en** **).**Weonderscheiden twee gevallen.
E1) en E2) .

**E1):**  . Dan heeft de vergelijking twee verschillende reële wortels en , dus .
De DV is te herschrijven als , ,
 ( , .
We bepalen de oplossing:
,,
 , , ,
 ( is een willekeurige constante ,
, ,
 .(20)In (19) staat de algemene oplossing van de DV . (21)
Uit de afleiding is gebleken dat een willekeurige constante voorstelt.
Nu is echter duidelijk dat ook toegestaan is, want dan volgt uit (20) dat
(constante functie) en deze functie voldoet ook aan de DV in (21).
Uit (20) blijkt tevens dat de grafiek van elke oplossing van DV waarvoor twee horizontale asymptoten heeft. Er zijn twee situaties mogelijk:
a) .
 → ,
 dus is een H.A. links en is een H.A. rechts.
b) .
 → ,
 dus is een H.A. links en is een H.A. rechts.
 **E2):** . Dan heeft de vergelijking een dubbele reële wortel , dus
 .
De DV is te herschrijven als , .
We bepalen de oplossing: , ,
 .
De grafiek van de oplossing van de DV heeft duidelijk de lijn als H.A.

**Voorbeeld 22**.(22)
We zullen niet rechtstreeks (20) toepassen om dat deze nogal lastig te memoriseren is.
Bovendien is het leerzamer om zelf ‘handmatig’ de DV op te lossen.
Voor de kwadratische uitdrukking geldt dat .
De oplossingen van de vergelijking zijn , dus .
De DV is te herschrijven als . Er volgt dat
 , ,
, ,
 , , , ,
 ( is een willekeurige constante ) , ,
, , (
Ook voldoet, want dan krijgen we de constante oplossing .
De algemene oplossing van (22) is , waarbij een willekeurige constante is.

**Voorbeeld 23** met .
De DV is te herschrijven als , .
We bepalen de oplossing: , , .
Bij de beginvoorwaarde vinden we dat , dus .

**F) DV van het type ( zijn constanten en** **).**Dit is een speciaal geval van E) en kan met een andere techniek worden opgelost.
We voeren een nieuwe variabele in. Stel daartoe Dan (kettingregel).
De DV gaat over in: . Vermenigvuldig beide leden met :
 . Dit is een inhomogene lineaire DV van orde 1 met constante coëfficiënten (zie D) ).
Een particuliere oplossing is en de algemene oplossing van de homogene DV is , dus de algemene oplossing van de DV is .
De oplossing van de gegeven DV is daarom:
 (

**Opmerkingen**
a) De bovenstaande DV kan natuurlijk ook met de techniek beschreven in E) opgelost worden.
b) In E) met leidt het stellen van niet tot een eenvoudiger DV. Er geldt dan:
 en na vermenigvuldigen met krijgen we:
 ; deze DV is van hetzelfde type als .
c) (constante functie) voldoet aan de DV maar kan niet weergegeven worden door een formule van de vorm

**Voorbeeld 24
.** (23)
We zullen deze DV op twee manieren oplossen.

**Methode 1** (zie E) )
, , , , ( , ,
 () , ,
 (.

**Methode 2** (zie F) )
Stel , dan krijgen we , dus (na vermenigvuldigen met ):
. Hiervan is een particuliere oplossing en de algemene oplossing van de homogene DV is . De algemene oplossing van is daarom
 . De oplossing van (23) is derhalve:
 (

**G) Homogene lineaire DV van orde 2 met constante coëfficiënten.**
Dit is een DV van de vorm . (24)
Hierbij zijn en constanten.
We proberen een oplossing van de vorm te vinden, waarbij een nader te bepalen constante is. Invullen in (24) geeft: , dus (na deling door ):
. (25)
Deze kwadratische vergelijking heet de **karakteristieke vergelijking** van de DV in (24).
Het type oplossing van de DV hangt af van de discriminant van de karakteristieke vergelijking. We onderscheiden drie gevallen
a) b) c) .

**a)**
Vergelijking (25) heeft dan twee verschillende reële oplossingen en .
We hebben hiermee twee functies gevonden die aan de DV voldoen, namelijk
 en . Neem nu willekeurige constanten en en vorm de functie
 . Dan voldoet ook deze functie aan de DV, immers

 .
De theorie (waarop we hier niet verder ingaan) leert dat de algemene oplossing van de DV
van de vorm is: .
Als en gegeven zijn (de **beginvoorwaarden**) , dan kunnen en bepaald worden.

**b) .**
Vergelijking (25) heeft dan een dubbele reële oplossing . Merk op dat .
De functie voldoet derhalve aan de DV. Beschouw nu de functie .
Dan voldoet ook aan de DV, want

(immers omdat een oplossing is van (25) en .
Analoog als bij geval a) blijkt dan dat voor willekeurige constanten en de functie
 voldoet aan de DV en de theorie leert tevens dat dit de algemene oplossing van de DV is. We hebben derhalve als algemene oplossing van de DV gevonden:  **.**
**c)**  **.**
Vergelijking (25) heeft dan twee complexe (niet-reële) oplossingen en die elkaars complex geconjugeerde zijn. Stel , dan , waarbij en reële getallen zijn met Omdat een wortel is van (25), geldt er dat ,
, dus . (26)
Voor willekeurige constanten en vormen we de functie .
We zullen aantonen dat deze functie voldoet aan de DV.

 .
Er volgt dat
.

 , waarbij
 en
.
Hierbij is (26) gebruikt.
De functie voldoet dus inderdaad aan de DV.
De theorie leert dat een willekeurige oplossing van de DV de volgende vorm heeft:
 .
**Opmerking**
Voor de DV (24) en willekeurige constanten en geldt dat er precies één functie is die een oplossing is van de DV en voldoet aan de **beginvoorwaarden** en .
Je kunt deze functie vinden door eerst de algemene oplossing van de DV te bepalen waarin de constanten en voorkomen. De beginvoorwaarden en leiden tot twee vergelijkingen met de twee onbekenden en . Hieruit kunnen en opgelost worden.

**Voorbeeld 25**Bepaal de oplossing van waarvoor en .
De karakteristieke vergelijking is , dus .
De oplossingen hiervan zijn en . De algemene oplossing van de DV is:
 ; .
Uit deze twee vergelijkingen volgt dat en . De gezochte functie is .

**Voorbeeld 26**
Bepaal de oplossing van waarvoor en .
De karakteristieke vergelijking is , dus . Deze vergelijking heeft de dubbele oplossing De algemene oplossing van de DV is: .
Er geldt:
 ; Er volgt dat en .
De gezochte functie is .

**Voorbeeld 27**
Bepaal de oplossing van waarvoor en .
De karakteristieke vergelijking is . Hiervan zijn de oplossingen (want )
 en . De algemene oplossing van de DV is
 . Er geldt dat
 .
 ; . Dit geeft en .
De gezochte functie is .

**H) Inhomogene lineaire DV van orde 2 met constante coëfficiënten.**Dit is een DV van de vorm . (27)
Hierbij zijn en constanten.
De DV is de bijbehorende *homogene* DV. (28)
De algemene oplossing van (28) wordt aangegeven met .
In G) is behandeld hoe te bepalen is (m.b.v. de karakteristieke vergelijking).
Een functie die aan (27) voldoet heet een **particuliere oplossing**, genoteerd als .
Analoog als in D) blijkt dat de algemene oplossing van (27) de som is van een particuliere oplossing en de algemene oplossing van de homogene DV (28) : .
In de volgende tabel staat hoe in een aantal gevallen een particuliere oplossing bepaald kan worden.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|  |  |
|  |  |

In deze tabel is het kleinste gehele niet-negatieve getal zodanig dat geen enkele term in
 (na zo nodig het uitwerken van de haakjes) voorkomt in .
Het getal heeft hierbij de waarde of .
Als , dan is op te vatten als 1, dus kan de factor weggelaten worden.

**Voorbeeld 28**. (29)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (29) ( is een constante) ; want in komt geen constante term voor. Invullen in (29) geeft: , dus .
De algemene oplossing van (29) is .

**Voorbeeld 29**. (30)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (30) ( is een constante) ;
 want in komt de constante term voor, maar geen term van de vorm .
Invullen in (30) geeft: , dus .
De algemene oplossing van (30) is .

**Voorbeeld 30**
. (31)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (31) ( is een constante) ;
 want in komen de termen en voor. Invullen in (31) geeft: , dus .
De algemene oplossing van (31) is .

**Opmerking**
Men kan de oplossing van (31) ook rechtstreeks vinden: uit volgt door integratie dat
 en nogmaals integreren geeft .

**Voorbeeld 31**. (32)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is
.
We zoeken een particuliere oplossing van (32) ( en zijn constanten) ;
 want in komen geen constante termen of termen van de vorm voor.
Invullen in (32) geeft: , dus en .
De algemene oplossing van (32) is .
 **Voorbeeld 32** met en . (33)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (33) ( en zijn constanten) ;
 want in komt een constante termvoor, maar geen term van de vorm .
Invullen in (33) geeft: , dus en .
De algemene oplossing van (33) (zonder beginvoorwaarden) is .
 , dus de beginvoorwaarden leiden tot
 en . Hieruit vinden we en .
De oplossing van (33) is daarom: .

**Voorbeeld 33**.(34)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (34) ( is een constante) ;
 want in komen de termen en voor.
Invullen in (34) geeft: , dus en .
De algemene oplossing van (34 is .

**Opmerking**
Men kan de oplossing van (34) ook rechtstreeks vinden:
Uit volgt door integratie dat en nogmaals integreren geeft .

**Voorbeeld 34**
. (35)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is
.
We zoeken een particuliere oplossing van (35) ( en zijn constanten) ;
 want in komen geen constante termen of termen van de vorm of voor.
Invullen in (35) geeft: . Er volgt dat
, dus , en .
De algemene oplossing van (35) is .

**Voorbeeld 35**
. (36)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (36) ( en zijn constanten) ;
 want in komt een constante termvoor, maar geen term van de vorm .
Invullen in (36) geeft: , dus
, waaruit we vinden dat , en .
De algemene oplossing van (36) is .

**Voorbeeld 36**
 . (37)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (37) ( is een constante) ;
 want in komen de termen en voor.
Invullen in (37) geeft: , dus , en .
De algemene oplossing van (37) is .

**Opmerking**
Men kan de oplossing van (31) ook rechtstreeks vinden:
uit volgt door integratie dat en nogmaals integreren geeft .

**Voorbeeld 37** (38)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als dubbele oplossing
. De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (38) ;
 want geen enkele term van komt voor in . Invullen in (38) geeft:

 , dus , zodat en .
De algemene oplossing van (38) is .

In het vervolg gebruiken we een aantal malen een kleine uitbreiding van de product regel.

We hebben dus gevonden:

**Voorbeeld 38** met en .(39)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (39);
 want de term komt in voor.
 .
 .
Invullen in (39) geeft:

 en hieruit volgt dat en , dus en .
De algemene oplossing van (39) (zonder beginvoorwaarden) is
 .
 .
 ; , dus .
De oplossing van (39) is .
 **Voorbeeld 39** . (40)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (40) ( is een constante) ; want in komt geen term voor. Invullen in (40) geeft: , dus .
De algemene oplossing van (40) is .

**Voorbeeld 40**. (41)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (41) ( is een constante) ;
 want in komt de term voor, maar er komt geen term van de vorm voor.
Invullen in (41) geeft:
 , , dus .
De algemene oplossing van (41) is .

**Voorbeeld 41**. (42)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als dubbele oplossing
. De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (42) ( is een constante) ;
want in komen de termen en voor. Invullen in (42) geeft:
, , dus .
De algemene oplossing van (42) is .

**Voorbeeld 42
 (**43)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en **.** De algemene oplossing van de homogene DV is
.
We zoeken een particuliere oplossing van (43) ; want geen enkele term van komt voor in . Invullen in (43) geeft:

 . Hieruit volgt dat
 , dus en .
De algemene oplossing van (43) is .

**Voorbeeld 43**
. (44)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (44) ;
 want in komt de term voor. Invullen in (44) geeft (na deling door )
 dus . Dit geeft: en .
De algemene oplossing van (44) is , oftewel
.

**Voorbeeld 44** (45)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als dubbele oplossing
. De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (45) ;
 want in komen de termen en voor.
Invullen in (45) geeft (na deling door ):

 , , dus en .
De algemene oplossing van (45) is , oftewel
.

**Voorbeeld 45**. (46)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (46) ;
 want geen enkele term van komt voor in . Invullen in (46) geeft (na deling door )

 , , dus
, waaruit we direct vinden dat
, en .
De algemene oplossing van (46) is .

**Voorbeeld 46**
 (47)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (47) ;
 want bevat een term van de vorm . Invullen in (47) geeft (na deling door )

,
, dus
, zodat , en .
De algemene oplossing van (47) is .

**Voorbeeld 47**
. (48)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als dubbele oplossing
. De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (48) ;
 want in komen de termen en voor.
Invullen in (48) geeft (na deling door ):

,
 , waaruit we vinden dat , en .
De algemene oplossing van (48) is , oftewel
.
 **Voorbeeld 48**
 . (49)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
We zoeken een particuliere oplossing van (49) ;
 want geen enkele term van komt voor in . Invullen in (49) geeft (na deling door

 . Dit impliceert:
 , oftewel
. Oplossen geeft: en .
De algemene oplossing van (49) is .

**Voorbeeld 49**
 . (50)
De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is
 .
We zoeken een particuliere oplossing van (50) ;
 want in komen de termen en voor.
 en

).
Dit alles ingevuld in (50) geeft (na deling door ) :

 ,
 Er volgt dat en .
De algemene oplossing van (50) is
 .

**Oefenopgaven**
Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

1) 19)

2) 20)

3) 21)

4) 22)

5) 23)

6) 24)

7) 25)

8) 26)

9) 27)

10) 28)

11) 29)

12) 30)

13) 31)

14) 32)

15) 33)

16) 34)

17) 35)

18)

**Uitwerkingen oefenopgaven**1) , , ,
 , ,
 (, , ( ;
 ook voldoet, want dan krijgen we de functie die overal gelijk is aan en dit is ook een
 oplossing van de DV.

2) , , ,
, ,
 , ,
 (, .
 Hierbij moeten en zó gekozen worden dat .

3) , ,
 , , ,
 .
 Uit deze betrekking is niet op te lossen.

4) , , , ,
 , , ,
  ().
 Hierbij moeten en zó gekozen worden dat .

5) ,
 Deze DV is van het type , met en .
 (dit is een primitieve van ). De oplossing van de DV is dus
 .
 De integraal berekenen we m.b.v. partiële integratie:

 .
 Dit geeft: , dus .
6) , .
 Deze DV is van het type , met en .
 (we zullen hier nemen).
 De oplossing van de DV is dus

 (m.b.v. partiële integratie) , dus .

7) .
 Deze DV is van het type , met en .
 (we zullen hier nemen).
 De oplossing van de DV is dus

 , dus .

8) .
 Deze DV is van het type , met en .
 (we zullen hier nemen).
 De oplossing van de DV is dus

 , dus .

9) ,
 Deze DV is van het type , met en .
 .
 De oplossing van de DV is dus

 ,
 dus ..

 **Andere methode (m.b.v. scheiding van variabelen)** , , ,
 *,*  , ,
 , (, ..

10) .
Deze DV is van het type , met en .
 De oplossing van de DV is dus:
 . De integraal berekenen we apart.
*.*  Hiermee vinden we dat , dus .

11) ,
 Deze DV is van het type , met en .
 (we nemen hier ). De oplossing van de DV is dus:

 , dus .

12)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 We zoeken een particuliere oplossing van de vorm . Invullen in de DV geeft:
 , . Hieruit vinden we dat
 , dus en .
 De algemene oplossing van de gegeven DV is: .

13)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 We zoeken een particuliere oplossing van de vorm . Invullen in de DV geeft:
, , waaruit we
 vinden dat , dus en .
 De algemene oplossing van de gegeven DV is:  **.**

14)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
 Invullen in de DV geeft:
 ,
 , waaruit we vinden dat
 . Oplossen geeft en .
 De algemene oplossing van de gegeven DV is: .

15)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
 Invullen in de DV geeft: , dus , zodat
 . De algemene oplossing van de gegeven DV is: .

16)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
 Invullen in de DV geeft:
 , dus
 , oftewel .
 Hieruit vinden we dat en .
 De algemene oplossing van de gegeven DV is: .

17)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 Toepassen van de laatste regel in de tabel op pag. 6 geeft als particuliere oplossing:
 . De algemene oplossing van de gegeven DV is:
 , oftewel .

18)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 We zoeken een particuliere oplossing van de vorm .
 Invullen in de DV geeft:
 ,
 ,
 .
 Dit leidt tot , zodat en .
 De algemene oplossing van de gegeven DV is: .

19)
 De algemene oplossing van de homogene DV is
 Toepassen van de laatste regel in de tabel op pag. 6 geeft als algemene oplossing:
 .

20)
 , , , ,
 , .

21)
 , , ,
 , ,
 , , ) ,
 , ,

22)
 **Methode 1**
 , , , , ( , ,
 () , ,
 (.

 **Methode 2**
 Stel , dan krijgen we , dus (na vermenigvuldigen met ) :
 . Hiervan is een particuliere oplossing en de algemene oplossing van de
 homogene DV is . De algemene oplossing van is daarom
 . De oplossing van de gegeven DV is derhalve:
  (

23)
 De karakteristieke vergelijking is: ; . De oplossingen hiervan zijn:
 en . De algemene oplossing van de DV is daarom:
 .

24)
 De karakteristieke vergelijking is: ; . De oplossingen hiervan zijn:
 . De algemene oplossing van de DV is daarom:
 .

25)
 De karakteristieke vergelijking is: ; . De oplossingen hiervan zijn:
 en . De algemene oplossing van de DV is daarom:
 .

26)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing van (32) ( en zijn constanten) ;
 want in komen geen constante termen of termen van de vorm voor.
 Invullen in de DV geeft: , dus en .
 De algemene oplossing van de DV is:  **.**

27)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing
 Invullen in de DV geeft: .
 Hieruit vinden we: , dus en .
 De algemene oplossing van de DV is: .

28)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing
 (we gebruiken i.p.v. , omdat in de term voorkomt).
 Invullen in de DV geeft: dus en .
 De algemene oplossing van de DV is: .

29)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing .
 , . Invullen in de DV geeft:
 ,
 , dus .
 De algemene oplossing van de DV is:  **.**
30)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing ; , want de term komt voor in .
 , . Invullen in de DV geeft:
 5, dus
 De algemene oplossing van de DV is: .

31)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing van de DV
 ( is een constante) ; want in komen de termen en voor.
 ;
 .
 Dit invullen in de DV geeft (na deling door ) :

 , . Hieruit vinden we: en .
 De algemene oplossing van de DV is: **.**

32)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing .
 ;
 .
 Dit invullen in de DV geeft (na deling door ) :

 , dus .
 Er volgt dat . Hieruit vinden we:
 , en .
 De algemene oplossing van de DV is: .33)
 De karakteristieke vergelijking van de homogene DV is met als oplossingen
 en . De algemene oplossing van de homogene DV is .
 We zoeken een particuliere oplossing
 .
 ;
 .
 Dit invullen in de DV geeft (na deling door ) :

 , dus
 .
 Er volgt dat . Hieruit vinden we:
 , en .
 De algemene oplossing van de DV is: .