**Oplossen gebroken vergelijkingen**Met een **gebroken vergelijking** bedoelen we een vergelijking waarin een of meer breuken voorkomen waarvan de noemer de op te lossen variabele bevat. Om dit soort vergelijkingen te kunnen oplossen dient men een aantal regels over breuken te beheersen.
De belangrijkste regels zullen we hieronder weergeven.
**1)** $\frac{A}{B}$ $ =$ $C$$ ⟺ A=B∙C$$(B\ne 0$)
**2)** $\frac{A}{B}$ $ + $ $\frac{C}{B}$ $= $ $\frac{A + C}{B}$ $\frac{A}{B}$ $ - $ $\frac{C}{B}$ $= $ $\frac{A - C}{B}$ $(B\ne 0$) **3)** $\frac{A}{B}$ $ + $ $\frac{C}{D}$ $= $ $\frac{A∙D + B∙C}{B∙D}$ $\frac{A}{B} $ $- $ $\frac{C}{D}$ $ = $ $\frac{A∙D - B∙C}{B∙D}$ $(B,D\ne 0$)
**4)** $\frac{A}{B}$ $ × $ $\frac{C}{D}= $ $\frac{A∙C}{B∙D}$ ($B,D\ne 0$)
**5)** $p∙$ $\frac{A}{B}$ $=$ $\frac{p ∙ A}{B}$ $(B\ne 0$)
**6)** $\frac{p ∙ A}{p ∙ B}$ $= $ $\frac{A}{B}$ $(B\ne 0$, $p\ne 0$)
**7)** $\frac{A}{B}$ $ : $ $\frac{C}{D}$ $=$ $\frac{A}{B}$ $ × $ $\frac{D}{C}$ $=$ $\frac{A ∙ D}{B ∙ C}$ $(B,C,D\ne 0$)
**8)** $\frac{0}{A}$ $=0$ $(A\ne 0$) $\frac{A}{0}$ bestaat niet ( $A$ willekeurig) **9)** $\frac{A}{B}$ $ × $ $\frac{C}{A}$ $=$ $\frac{C}{B}$ $(A,B\ne 0$)
**10)** $\frac{A}{B}$ $ =0$ $ ⟺$ $ A=0$$(en B\ne 0)$
**11)** $\frac{A}{B}$ $ = $ $\frac{C}{D}$ $⟺$ $A∙D=B∙C$ (en $B,D\ne 0)$
**12)** $\frac{A}{B}$ $ = $ $\frac{C}{B}$ $ ⟺$ $A=C$ $(en B\ne 0)$
**13)**  $\frac{A}{B}$ $ = $ $\frac{A}{C}$ $⟺$ $A=0 ∨ B=C$ (en$B,C\ne 0$)
**14)**  $\frac{\frac{A}{B}}{C}$ $ =$ $\frac{A}{B ∙ C}$ $\frac{A}{\frac{B}{C}}$ $ =$ $A∙\frac{C}{B} $ $= $ $\frac{A ∙ C}{B}$ ($B,C\ne 0$)

**Opmerking**
Nadat men een gebroken vergelijking heeft opgelost dient men te **controleren** of de oplossingen voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking. Hierbij hoeft voor de deze oplossingen slechts geverifieerd te worden of geen van de noemers van de optredende breuken gelijk aan nul wordt. Wordt voor een bepaalde oplossing een noemer nul, dan vervalt die oplossing.

**Voorbeeld 1**
$\frac{2x - 1}{x + 2} =3$ We passen regel **1)** toe: $2x-1=3∙(x+2)$ , $-x=7$ , $x=-7$.
Voor $x=-7$ wordt de noemer van de breuk $\frac{2x - 1}{x + 2}$ niet nul, dus deze oplossing voldoet.

**Voorbeeld 2**
$\frac{2x - 5}{4 - x} = \frac{x + 2}{3x - 4} $
We passen regel **11)** toe (kruiselings vermenigvuldigen):
$\left(2x-5\right)\left(3x-4\right)=\left(x+2\right)(4-x)$ , $6x^{2}-23x+20=-x^{2}+2x+8$ ,
$7x^{2}-25x+12=0$ ; $D=(-25)^{2}-4∙7∙12=289$. De oplossingen zijn
$x=$ $\frac{25 \pm \sqrt{289}}{14}$ $ = $ $\frac{25 \pm 17}{14}$ , dus $x=3 ∨ x=$ $\frac{4}{7}$ . Beide oplossingen voldoen.

**Voorbeeld 3**
$\frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{x + 2} $
We schrijven het linkerlid m.b.v. regel **3)** als één breuk:
$\frac{2 ∙ \left(2x – 1\right) + 1∙ (x + 1)}{2 ∙ \left(x + 1\right)}= \frac{3}{x + 2}$ , dus $\frac{5x - 1}{2 ∙ \left(x + 1\right)}= \frac{3}{x + 2}$ .
Vervolgens passen we regel **11)** toe: $\left(5x-1\right)\left(x+2\right)=6∙(x+1)$ , $5x^{2}+3x-8=0$.
$D=3^{2}-4∙5∙(-8)=169$. De oplossingen zijn
$x=$ $\frac{-3 \pm \sqrt{169}}{10}$ $ = $ $\frac{-3 \pm 13}{10}$ , dus $x=1 ∨ x=$ $-1\frac{3}{5}$ . Beide oplossingen voldoen.

**Voorbeeld 4**
$\frac{x^{2} - 9}{2x - 6} = \frac{x^{2 }- 9}{x - 1}$
We merken op dat de twee tellers gelijk zijn, dus we kunnen regel **13)** toepassen:
$x^{2}-9=0 ∨ 2x-6=x-1$, $x=3 ∨ x=-3 ∨ x=5$.
De oplossing $x=3$ vervalt (omdat de noemer van de breuk in het rechterlid nul is voor
$x=3$), maar de andere twee oplossingen voldoen.

**Voorbeeld 5**
$\frac{x^{2}}{x + 5} = \frac{2x + 8}{x + 5}$
We merken op dat de twee noemers gelijk zijn, dus we kunnen regel **12)** toepassen:
$x^{2}=2x+8$ , $x^{2}-2x-8=0$ , $\left(x-4\right)\left(x+2\right)=0$ , $x=4 ∨ x=-2$.
Beide oplossingen voldoen.

**Voorbeeld 6**
$\frac{x^{2}+ 4x - 12}{x^{2} – x - 2} = \frac{5x^{2 }- 15x}{x^{2} + 3x - 18}$
Duidelijk is dat als we direct regel **11)** (kruiselings vermenigvuldigen) toepassen we uitkomen op een vierdegraadsvergelijking die zeer lastig algebraïsch is op te lossen.
In een dergelijke situatie gaan we eerst kijken of de breuken te herleiden zijn tot een eenvoudiger vorm. Dit is hier inderdaad het geval. De vergelijking is te herschrijven als:
$\frac{\left(x + 6\right)(x - 2)}{\left(x + 1\right)(x - 2)} = \frac{5x(x - 3)}{\left(x + 6\right)(x - 3)}$ , $\frac{x + 6}{x + 1} = \frac{5x}{x + 6}$ ($x\ne 2 en x\ne 3) ,$
$(x+6)^{2}=5x(x+1)$ , $-4x^{2}+7x+36=0$ . $D=7^{2}-4∙\left(-4\right)∙36=625$.
$x=$ $\frac{-7 \pm \sqrt{625}}{-8}$ $ = $ $\frac{-7 \pm 25}{-8}$ , dus $x=4 ∨ x=$ $-2\frac{1}{4}$ . Beide oplossingen voldoen.

**Voorbeeld 7**
$\frac{3x^{2}+ 10}{\left(x^{2 }- 1\right)^{2} } =2\frac{4}{9}$
Omdat hier alleen $x^{2}$ voorkomt (en geen eerstegraadsterm $x$) stellen we $x^{2}=p$ .
Ook schrijven we rechterlid in een handiger vorm.
$\frac{3p + 10}{\left(p - 1\right)^{2} } = \frac{22}{9}$ . Toepassen van regel **11)** geeft: $9∙\left(3p+10\right)=22∙(p-1)^{2}$ ,
$22p^{2}-71p-68=0$ ; $D=\left(-71\right)^{2}-4∙22∙\left(-68\right)=11025$.
$p=$ $\frac{71 \pm \sqrt{11025}}{44}$ $ = $ $\frac{71 \pm 105}{44}$ , dus $p=4 ∨ p=$ $-\frac{17}{22}$ .
$x^{2}=4$ geeft $x=2 ∨ x=-2$ (beide voldoen) ;
$x^{2}=-\frac{17}{22}$ heeft geen oplossing.

**Voorbeeld 8**
$\frac{3x - 1}{x + 2} $ $: \frac{4x + 3}{x - 1}$ $=-8$
We passen eerst regel **7)** en daarna regel **1)** toe:
$\frac{\left(3x - 1\right)\left(x - 1\right)}{\left(x + 2\right)\left(4x + 3\right)}$ $ =-8$ , $\left(3x-1\right)\left(x-1\right)=-8∙\left(x+2\right)(4x+3)$,
$3x^{2}-4x+1=-32x^{2}-88x-48$ , $35x^{2}+84x+49=0$ , $5x^{2}+12x+7=0$ .
$D=12^{2}-4∙5∙7=4$ . De oplossingen zijn
$x=$ $\frac{-12 \pm \sqrt{4}}{10}$ $ = $ $\frac{-12 \pm 2}{10}$ , dus $x=-1 ∨ x=$ $-1\frac{2}{5}$ . Beide oplossingen voldoen.
 **Voorbeeld 9**$\frac{x}{x - 1} - \frac{4}{x}$ $ + $ $\frac{3}{x + 1} =1$
We schrijven het linkerlid als één breuk.
$\frac{x∙x\left(x + 1\right) - 4∙\left(x - 1\right)\left(x + 1\right) + 3∙x(x - 1)}{x\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)}$ $=1$ , $\frac{x^{3} - 3x + 4}{x^{3} - x}$ $=1$ ,
$x^{3}-3x+4=x^{3}-x$ , $-2x+4=0$ , $x=2$. Deze oplossing voldoet.